代数拓扑有关的空间

Guanyu Li

1 紧生成空间

定义. 我们先给出几个定义：

1. 若拓扑空间X的任意紧子空间都是X中的闭集，则称X是弱Hausdorff(weakly Hausdorff)的.
2. 若X的子空间A满足对任意Hausdorff紧集K和连续函数$f:K\to X$，$f^{-1}(A)$都是K中的闭集，则称A是紧闭的(compactly closed, k closed).若空间X的所有紧闭集都是闭集，则称X是k空间(k-space)或紧生成空间(compactly generated space).
3. 连续映射$f:X\to Y$若满足对Y中的任意紧闭集K，$f^{-1}(K)$都是X中的紧闭集则称f是k连续的(k-continuous).

引理1.1. *给定拓扑空间X，记X所有的紧闭子集的全体为kX，那么kX构成集合X上的一个（闭集）拓扑，且若C是X的闭集那么$C\in kX$.*

Proof. □

记X给由紧闭子集组成的拓扑组成的拓扑空间为kX，称它为X的k化($k$ification).引理同样说明$\mathrm{id}:kX\to X$是连续函数.X是紧生成空间当且仅当$kX\cong X$.

对连续映射$f:X\to Y$，若对任意$V\subseteq Y$，V是开集当且仅当$f^{-1}(V)$，则称f是proclusion.

命题1.1.

1. *若X是紧生成空间，则X的任意闭子空间C都是紧生成空间.*
2. *若X是紧生成空间，$f:X\to Y$是proclusion则Y是紧生成空间.*
3. *紧生成空间的余积是紧生成空间.*

引理1.2. *给定紧生成空间X和拓扑空间Y，对任意连续函数$f:X\to Y$，都存在唯一的$\tilde{f}:X\to kY$使得$f=i\circ\tilde{f}$.*

Proof. 取$\tilde{f}:=i^{-1}\circ f$. □

这个引理意味着函子对

$$i:k\mathbf{Top}\leftrightarrows\mathbf{Top}:k$$

是伴随函子.注意在范畴$k\mathbf{Top}$中，乘积并不一定存在，为保证乘积在$k\mathbf{Top}$中需要对乘积再取一次函子$k-$.

习题1.1. 对任意Hausdorff紧空间K和紧生成空间X,Y，求证$f:K\to k(X\times Y)$连续当且仅当$f:K\to X\times Y$连续.

命题1.2. *1. 弱Hausdorff的空间X中的点都是闭的.*

2. 局部紧的空间都是紧生成的.

3. 第一可数的空间都是紧生成的.

习题1.2. 若X是紧生成空间，则X是弱Hausdorff的当且仅当$X \hookrightarrow X \times X$是闭集.

2 k-Hausdorff空间

定义. 任取拓扑空间X，若$X \times X$的对角线Δ是紧闭集则称X是k-Hausdorff空间.

引理2.1. 设X, Y是拓扑空间，且$C \subseteq X \times Y$，那么下列陈述等价：

1. *C是$X \times Y$中的紧闭子集.*
2. *若K, L是Hausdorff紧集，$f : K \to X, g : L \to Y$是连续映射，那么$(f \times g)^{-1}(C)$是$K \times L$的闭集.*
3. *若K是Hausdorff紧集，$f : K \to X, g : K \to Y$是连续映射，那么$(f \times g)^{-1}(C)$是$K \times K$的闭集.*
4. *若L是Hausdorff紧集，$g : L \to Y$是连续映射，那么$(\mathrm{id}_X \times g)^{-1}(C)$是$X \times L$的闭集.*

引理2.2. *对任意的拓扑空间X，子集$C \subseteq X$是紧闭的当且仅当对任意Hausdorff紧集K和连续函数$f : K \to X$，$(f \times f)^{-1}(C)$是$K \times K$的闭集.*

命题2.1. *对拓扑空间X，下列陈述等价：*

1. *X是k-Hausdorff空间.*
2. *若K, L是Hausdorff紧集，$f : K \to X, g : L \to X$是连续映射，那么$(f \times g)^{-1}(\Delta)$是$K \times L$的闭集.*
3. *若K是Hausdorff紧集，$f : K \to X$是连续映射，那么$(f \times f)^{-1}(\Delta)$是$K \times K$的闭集.*
4. *若K是Hausdorff紧集，$f : K \to X$是连续映射，那么K中的任意两个点k_1, k_2只要$f(k_1) \neq f(k_2)$就存在k_1, k_2在K中的邻域U_1, U_2使得$f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$.*

命题2.2. *拓扑空间X是k-Hausdorff空间当且仅当对任意Hausdorff紧集K, L和连续映射$f : K \to X, g : L \to X$，$K \times_X L$是Hausdorff紧集.*

命题2.3. *1. Hausdorff空间X是k-Hausdorff空间.*

2. 若$f : X \to Y$是左可逆连续映射，Y是k-Hausdorff空间，那么X是k-Hausdorff空间.

3. k-Hausdorff空间的任意积和余积都是k-Hausdorff空间.

任意给定一个拓扑空间，都能找到与之对应的k-Hausdorff空间hX，构造如下：记$X/\sim_\lambda$是X在等价关系$\sim_\lambda$下的商空间，$\{\sim_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$是所有使得$X/\sim_\lambda$是$k$-Hausdorff空间的等价关系的全体，$q : X \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X/\sim_\lambda$是自然商结构诱导的映射，$hX$是$q$的像.称$hX$是$X$的$k$-Hausdorff化.

命题2.4. *任给定拓扑空间X，hX是k-Hausdorff空间，且映射$q : X \to hX$是proclusion.此外，对任意映到k-Hausdorff空间Y的连续映射，都存在唯一的$\tilde{f} : hX \to Y$使得$f = \tilde{f} \circ q$.*

Proof. 取 □

这意味着函子对

$$h : \mathbf{Top} \leftrightarrows k\mathbf{Haus} : i$$

是伴随函子.

3 CGWHaus空间

命题3.1. *若X是紧生成空间，那么hX是k-Hausdorff空间.若X是k-Hausdorff空间，那么kX是紧生成空间.*

命题3.2. *若X是弱Hausdorff空间，K是Hausdorff紧集，$f : K \to X$是连续映射，那么$f(K)$是Hausdorff紧子空间.*

命题3.3. *弱Hausdorff空间是k-Hausdorff空间.*

引理3.1. *若X是k-Hausdorff空间，K是Hausdorff紧集，$f : K \to X$是连续映射，那么$f(K)$是紧生成的.*

命题3.4. *若X是紧生成空间，那么X是k-Hausdorff空间当且仅当X是弱Hausdorff空间.*

命题3.5. *若X是弱Hausdorff空间，那么X是紧生成空间当且仅当X的子集C是闭集等价于C与X的紧子集的交是闭集.*

4 一些性质

命题4.1. *任给定拓扑空间X和紧Hausdorff空间K，那么投影映射$\mathrm{pr}_1 : X \times K$将闭集映到闭集，将紧闭集映到紧闭集.*

命题4.2. *任给定拓扑空间X, Y，$C \subseteq X \times Y$是紧闭集当且仅当*

1. *对任意的$x \in X$，集合$C_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$是$Y$中的紧闭集；*
2. *若L是Hausdorff紧集，$g : L \to X$是连续映射，$\mathrm{pr}_1 \circ (\mathrm{id}_X \times g)^{-1}(C)$是$X$中的紧闭集.*

命题4.3. *局部Hausdorff紧的空间是CGWHaus空间.*

命题4.4. *任给定紧生成空间X和局部Hausdorff紧空间Y，$X \times Y$是紧生成空间.*

推论4.4.1. *任给定空间X和局部Hausdorff紧空间Y，$kX \times Y \xrightarrow{\mathrm{id}} k(X \times Y)$是同胚.*

命题4.5. *任给定CGWHaus空间X和局部Hausdorff紧空间Y，$X \times Y$是CGWHaus空间.*

5 映射空间

对任意拓扑空间X, Y，记

$$\mathrm{Map}(X, Y) = \hom_{\mathbf{Top}}(X, Y).$$

对任意的连续映射$f : T \times X \to Y$，给定点$t \in T$就给出了连续函数$f(t, -) : X \to Y$，这样就得到了一个映射

$$T \to \mathrm{Map}(X, Y).$$

定义. 任取拓扑空间X, Y，给定$\mathrm{Map}(X, Y)$上拓扑结构如下，使得子集$U \subseteq \mathrm{Map}(X, Y)$是开集当且仅当任给定Hausdorff紧空间$K$和连续函数$f : K \times X \to Y$，集合

$$\tilde{f}^{-1}(U) = \{k \in K \mid f(k, -) \in U\}$$

是开集，其中$\tilde{f}^{-1} : K \to \mathrm{Map}(X, Y)$是$k \mapsto f(k, -)$.

定理5.1. *如上定义使得*

$$\mathrm{Map} : \mathbf{Top}^{\circ} \times \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$$

是函子.

引理5.1. *若X, Y是拓扑空间，K是Hausdorff紧集，$f : K \to X$是连续映射，V是Y中的开集，则*

$$U(f, V) := \{g \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid g(f(K)) \subseteq V\}$$

是$\mathrm{Map}(X, Y)$中的开集.

命题5.2. *任给定紧生成空间X, Y和拓扑空间Z，$f : k(X \times Y) \to Z$是连续的当且仅当$\tilde{f} : X \to \mathrm{Map}(Y, Z)$连续.*

推论5.2.1. *任给定紧生成空间X, Y，$\mathrm{Map}(X, Y)$是紧生成空间.*

命题5.3. *任给定紧生成空间X, Y和拓扑空间Z，*

$$\mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \to \mathrm{Map}(k(X \times Y), Z)$$

是同胚.

命题5.4. *任给定拓扑空间X和k-Hausdorff空间Y，$\mathrm{Map}(X, Y)$是k-Hausdorff空间.*

定理5.5. *本节定义使得范畴***CGWHaus***是笛卡尔闭的，即存在***CGWHaus***中的自然同构*

$$\mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \to \mathrm{Map}(k(X \times Y), Z).$$