

# 余切复形

G.Li

在交换代数中, 环同态  $\alpha: R \rightarrow A$  的光滑性可以通过相对微分模  $\Omega_{A/R}$  来描述, 由于

$$\Omega_{-/R}: R\text{-}\mathbf{Algebra} \rightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$$

是一个函子, 因而给定一个单纯  $R$  代数  $A_*$ , 都可以由这个函子得到一个单纯  $R$  模  $(\Omega_{A/R})_*$ , 且一个单纯  $R$  代数态射  $f: A_* \rightarrow B_*$  也给出单纯  $R$  模态射  $(\Omega_{f/R})_*$ .

**定义.** 给定环同态  $f: R \rightarrow S$ , 若  $P_*$  是  $s(S)_*$  在  $s(R)_*$  上的单纯预解, 令

$$\mathcal{L}_{S/R} := \Omega_{P/R} \otimes_P s(S)_*,$$

于是  $\mathcal{L}_{S/R}$  是一个单纯  $s(S)_*$  模, 称它对应的复形  $L_{S/R}$  为  $S$  在  $R$  上的余切复形 (cotangent complex of  $S$  over  $R$ ).

由于单纯预解是同伦下唯一的, 于是  $L_{S/R}$  是良定义的.

**练习 1.** 设  $s(R)_* \hookrightarrow P_* \twoheadrightarrow s(S)_*$  是一个单纯预解, 令

$$I := \text{Ker } P_* \rightarrow s(S)_*,$$

证明存在单纯  $s(S)_*$  模同构

$$I/I^2 \cong \mathcal{L}_{S/R}.$$

**定义.** 给定  $R$  代数  $A$  和  $A$  模  $M$ , 借助余切复形可以定义 André-Quillen 同调 (André-Quillen homology) (对应地, André-Quillen 上同调 (André-Quillen cohomology)) 为

$$D_n(A/R, M) := H_n(L_{A/R} \otimes_S M)$$

(对应地,  $D^n(A/R, M) := H_{-n}(\text{Hom}(L_{A/R}, M))$ ).

**例 1.** 设  $X$  是未定元的集合,  $R$  是交换环且  $S = R[X]$  是以  $X$  为未定元的  $R$  多项式代数, 那么

$$\mathcal{L}_{S/R} \simeq s(\Omega_{S/R})_*,$$

进而对任意  $n > 0$ ,  $D^n(S/R, M) = D_n(S/R, M) = 0$ .

**引理 1.** 设  $R$  是交换环.

1. 若  $P$  是投射  $R$  模, 那么扩张

$$\mathcal{L}_{\text{Sym}_R(P)/R} \rightarrow s(\Omega_{\text{Sym}_R(P)/R})_*$$

是弱等价.

2. 若  $A, B$  是  $R$  代数, 且  $A, B$  中至少一个是  $R$  平坦的, 那么

$$s(A \otimes_R B)_* \otimes_{s(A)_*} \mathcal{L}_{A/R} \oplus s(A \otimes_R B)_* \otimes_{s(B)_*} \mathcal{L}_{B/R} \rightarrow \mathcal{L}_{s(A \otimes_R B)_*/R}$$

是  $s(A \otimes_R B)_*$  模同构.

**命题 1** (基变换). 设  $R$  是交换环,  $A$  是  $R$  代数,  $f: R \rightarrow S$  是交换环间的态射, 因此有

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \otimes_R S, \end{array}$$

这诱导了单纯  $s(A \otimes_R S)_*$  模同态

$$\mathcal{L}_{A/R} \otimes_{s(A)_*} s(A \otimes_R S)_* \rightarrow \mathcal{L}_{A \otimes_R S/S}.$$

**定理 2** (平坦基变换). 如定理 1 中的条件, 若  $f, \alpha$  中任意一个是平坦的, 则定理 1 中诱导的同态是弱等价.

**定理 3.** 设  $R \rightarrow S \rightarrow T$  是交换环的映射, 那么

$$s(T)_* \otimes \mathcal{L}_{S/R} \rightarrow \mathcal{L}_{T/R} \rightarrow \mathcal{L}_{T/S}$$

是单纯  $s(T)_*$  模的余纤维序列, 于是对任意的  $T$  模  $P$ , 存在  $T$  模长正合序列

$$\cdots \rightarrow D_1(S/R, M) \rightarrow D_1(T/R, M) \rightarrow D_1(T/S, M) \rightarrow P \otimes_T \Omega_{S/R} \rightarrow P \otimes_T \Omega_{T/R} \rightarrow P \otimes_T \Omega_{T/S} \rightarrow 0,$$

特别地, 当  $M = T$  时, 这个序列是相对余切序列的延申.

**定理 4.** 交换环的态射  $f: R \rightarrow S$  是光滑的当且仅当  $L_{S/R} \rightarrow \Omega_{S/R}$  是弱等价且  $\Omega_{S/R}$  是投射  $S$  模. 特别地,  $f$  是平展的当且仅当  $L_{S/R}$  只有平凡上调.

**定理 5** (第一消去定理).

以上的三个定理证明都需要用到模型范畴, 我们略过.

除此之外, 我们还有一种对余切复形更加范畴化的构造方式, 它来源于 Quillen. 定理 3 告诉我们,  $L_{A/R}$  事实上是  $\Omega_{A/R}$  的导出函子, 但在之前的构造我们并没有用同调代数中已经存在的结果, 这主要的原因是范畴  $R - \mathbf{Algebra}$  不是一个 Abel 范畴 (原因: 一个  $R$  代数同态  $f: A \rightarrow B$  没有核). Quillen 的想法是将这个范畴 “Abel 化”, 这就是在后面讨论的内容. 引理 3 在另一方面说明范畴  $R - \mathbf{Algebra}$  不是合适的范畴.

我们尝试用两个例子说明这样的考虑是合适的: 考虑  $Y$  是一个拓扑空间,  $X$  是它的 CW 逼近. 令  $\text{Ab}(X)$  是  $X$  上的自由拓扑 Abel 群, 那么 Dold-Thom 定理说明

$$\pi_*(\text{Ab}(X)) \cong H_*(X) \cong H_*(Y).$$

注意到我们在求  $\text{Ab}(-)$  之前必须要找一个 CW 逼近, 用模型范畴的语言来说, 这是一个余纤维替代 (cofibrant replacement). 所以我们可以把奇异复形看作  $\text{Ab}(-)$  的导出函子. 另一个例子来源于单纯代数的同伦群, Dold-Kan 对应说明一个单纯代数  $A_*$  的同伦群与它的 Abel 化的同调群是一样的. 这里我们不需要取余纤维替代, 只是因为单纯代数的范畴中所有的对象都是余纤维.

**定义.** 设  $\mathcal{C}$  是一个范畴, 若  $\mathcal{C}$  中的对象  $A$  满足函子  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  可以分解为

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab} \xrightarrow{U} \mathbf{Set},$$

则称  $A$  是 Abel 群对象 (abelian group object). 对 Abel 群对象  $A, B$ , 态射  $f : A \rightarrow B$  若满足对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $C$ , 映射

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(C, f) : \text{hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$$

都是群同态, 则称  $f$  是 Abel 群对象态射 (a morphism of abelian group objects).

对范畴  $\mathcal{C}$  记它的 Abel 群对象和 Abel 群对象态射组成的范畴为  $\mathcal{C}_{\text{ab}}$ .

**引理 2.** 对任意范畴  $\mathcal{C}$ ,

$$s(\mathcal{C}_{\text{ab}}) \simeq (s\mathcal{C})_{\text{ab}}.$$

**练习 2.** 设范畴的嵌入  $\mathcal{C}_{\text{ab}} \hookrightarrow \mathcal{C}$  有左伴随  $\text{Ab} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{ab}}$ , 那么嵌入  $s\mathcal{C}_{\text{ab}} \hookrightarrow s\mathcal{C}$  也有左伴随, 在每一层都是  $\text{Ab}$ .

**定义.** 设  $\mathcal{C}$  是一个模型范畴, 且  $\mathcal{C}_{\text{ab}}$  上也有模型范畴结构, 满足  $\mathcal{C}_{\text{ab}} \hookrightarrow \mathcal{C}$  是右 Quillen 伴随, 有左 Quillen 伴随  $\text{Ab} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{ab}}$ , 称为 Abel 化 (abelianisation).

**引理 3.**  $R - \mathbf{Algebra}$  中的 Abel 群对象只有零代数.

设  $R$  是给定的交换环,  $A$  是给定的  $R$  代数, 接下来我们的讨论都限定在范畴  $R - \mathbf{Algebra}/A$  中, 即所有的  $R$  代数映射  $f : B \rightarrow$  的全体. 考虑函子

$$\begin{aligned} \ltimes : A - \mathbf{Mod} &\rightarrow R - \mathbf{Algebra}/A \\ M &\mapsto A \ltimes M, \end{aligned}$$

其中,  $A \ltimes M$  作为  $A$  模是  $A \oplus M$ , 且乘法满足

$$(a, m) \cdot (b, n) := (ab, an + bm).$$

**命题 6.** 函子  $\ltimes : A - \mathbf{Mod} \rightarrow R - \mathbf{Algebra}/A$  有分解  $A - \mathbf{Mod} \rightarrow (R - \mathbf{Algebra}/A)_{\text{ab}} \hookrightarrow R - \mathbf{Algebra}/A$ , 并且给出了范畴的等价

$$A - \mathbf{Mod} \simeq (R - \mathbf{Algebra}/A)_{\text{ab}}.$$

证明. □

**定理 7.**

$$\Omega_{-/R} \otimes_{-} A : R - \mathbf{Algebra}/A \rightleftarrows A - \mathbf{Mod} : \ltimes$$

是一对伴随函子.

于是根据练习2, 这个伴随可以扩张到

$$s(R - \mathbf{Algebra}/A) \rightleftarrows s(A - \mathbf{Mod}).$$

在给定两个范畴正确的模型范畴结构后, 可以证明

**引理 4.** 上述提到的左右伴随函子都是 Quillen 伴随.

**定义.** 余切复形函子是全左导出函子

$$\mathcal{L}\mathrm{Ab} : D(s(R - \mathbf{Algebra}/A)) \rightarrow D(s(A - \mathbf{Mod})).$$

$R$  代数  $A$  的余切复形是

$$\mathcal{L}_{A/R} := \mathcal{L}\mathrm{Ab}(s(A)_*).$$

## 1 一些计算

余切复形的计算是非常困难的, 这其中最根本的原因在于单纯预解是非常大的, 里面包含了非常多的信息

**例 2.** 设  $k$  是一个域,  $k[\epsilon] = k[x]/(x^2)$  且  $k[\epsilon] \rightarrow k$  是一阶加厚, 那么我们有正合列

$$0 \rightarrow (\epsilon) \rightarrow k[\epsilon] \rightarrow k \rightarrow 0.$$

回顾给定的 Noether 环同态  $f : R \rightarrow S$

## 2 形变理论

- 定义** (Tag 04EW). 1. 给定概型  $Y$ , 若概型  $X \rightarrow Y$  是闭子概型且  $X$  与  $Y$  有相同的底空间 (underlying space), 则称  $Y$  是  $X$  的加厚 (thickening).
2. 若  $Y$  是  $X$  的加厚, 且  $X \hookrightarrow Y$  的定义理想层  $\mathcal{I}$  满足  $\mathcal{I}^2 = 0$ , 则称  $Y$  是  $X$  的一阶加厚 (first order thickening).
3. 给定两个加厚  $X \hookrightarrow Y, Z \hookrightarrow W$ , 若态射  $f : Y \rightarrow W$  满足  $f|_X$  是态射  $X \rightarrow Z$ , 则称  $(f, f|_X) : (X \subseteq Y) \rightarrow (Z \subseteq W)$  是加厚的态射 (morphism of thickenings).
4. 类似地可以定义  $S$  上的概型的加厚和加厚的态射, 这只要把以上定义中的概型和映射换为  $\mathbf{Sch}_S$  中的对象和映射即可.

**引理 5.**

**定义.** 设  $S \hookrightarrow T$  是一阶加厚, 且  $f : X \rightarrow S$  是概型的态射. 若  $X$  的一阶加厚  $X'$  满足存在平坦态射  $g : X' \rightarrow T$  使得图

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ S & \hookrightarrow & T, \end{array}$$

交换且是拉回, 则称  $X'$  是  $X$  的形变 (deformation).

**练习 3** (Tag 08KY). 记  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  分别是一阶加厚  $S \hookrightarrow T$  和  $X \hookrightarrow X'$  的定义层, 那么存在自然的  $\mathcal{O}_X$  模态射  $f^*\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ . 求证态射  $f^*\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  是满态射当且仅当定义中的交换图是拉回, 且在此情况下,  $f^*\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  是同构当且仅当  $g$  是平坦的.

**定理 8** (Tag 08UX). 设  $S \hookrightarrow T$  是由  $\mathcal{I}$  定义的一阶加厚,  $f: X \rightarrow S$  是概型的态射.

1. 存在自然的元素  $o(f) \in \mathrm{Ext}_X^2(L_{X/S}, f^*\mathcal{I})$ , 满足形变存在当且仅当  $o(f) = 0$ .

元素  $o(f)$  被称为 (obstruction class)