

余切复形

G.Li

在交换代数中，环同态 $\alpha : R \rightarrow A$ 的光滑性可以通过相对微分模 $\Omega_{A/R}$ 来描述，由于

$$\Omega_{-/R} : R - \mathbf{Algebra} \rightarrow R - \mathbf{Mod}$$

是一个函子，因而给定一个单纯 R 代数 A_* ，都可以由这个函子得到一个单纯 R 模 $(\Omega_{A/R})_*$ ，且一个单纯 R 代数态射 $f : A_* \rightarrow B_*$ 也给出单纯 R 模态射 $(\Omega_{f/R})_*$ 。

定义. 给定环同态 $f : R \rightarrow S$ ，若 P_* 是 $s(S)_*$ 在 $s(R)_*$ 上的单纯预解，令

$$\mathcal{L}_{S/R} := \Omega_{P/R} \otimes_P s(S)_*,$$

于是 $\mathcal{L}_{S/R}$ 是一个单纯 $s(S)_*$ 模，称它对应的复形 $L_{S/R}$ 为 S 在 R 上的余切复形 (cotangent complex of S over R)。

由于单纯预解是同伦下唯一的，于是 $L_{S/R}$ 是良定义的。

练习 1. 设 $s(R)_* \hookrightarrow P_* \twoheadrightarrow s(S)_*$ 是一个单纯预解，令

$$I := \text{Ker } P_* \rightarrow s(S)_*,$$

证明存在单纯 $s(S)_*$ 模同构

$$I/I^2 \cong \mathcal{L}_{S/R}.$$

定义. 给定 R 代数 A 和 A 模 M ，借助余切复形可以定义 André-Quillen 同调 (André-Quillen homology) (对应地，André-Quillen 上同调 (André-Quillen cohomology)) 为

$$D_n(A/R, M) := H_n(L_{A/R} \otimes_S M)$$

(对应地， $D^n(A/R, M) := H_{-n}(\text{Hom}(L_{A/R}, M))$).

例 1. 设 X 是未定元的集合， R 是交换环且 $S = R[X]$ 是以 X 为未定元的 R 多项式代数，那么

$$\mathcal{L}_{S/R} \simeq s(\Omega_{S/R})_*,$$

进而对任意 $n > 0$ ， $D^n(S/R, M) = D_n(S/R, M) = 0$.

引理 1. 设 R 是交换环。

1. 若 P 是投射 R 模，那么扩张

$$\mathcal{L}_{\text{Sym}_R(P)/R} \rightarrow s(\Omega_{\text{Sym}_R(P)/R})_*$$

是弱等价。

2. 若 A, B 是 R 代数, 且 A, B 中至少一个是 R 平坦的, 那么

$$s(A \otimes_R B)_* \otimes_{s(A)_*} \mathcal{L}_{A/R} \oplus s(A \otimes_R B)_* \otimes_{s(B)_*} \mathcal{L}_{B/R} \rightarrow \mathcal{L}_{s(A \otimes_R B)_*/R}$$

是 $s(A \otimes_R B)_*$ 模同构.

命题 1 (基变换). 设 R 是交换环, A 是 R 代数, $f : R \rightarrow S$ 是交换环间的态射, 因此有

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \otimes_R S, \end{array}$$

这诱导了单纯 $s(A \otimes_R S)_*$ 模同态

$$\mathcal{L}_{A/R} \otimes_{s(A)_*} s(A \otimes_R S)_* \rightarrow \mathcal{L}_{A \otimes_R S/S}.$$

定理 2 (平坦基变换). 如定理1中的条件, 若 f, α 中任意一个是平坦的, 则定理1中诱导的同态是弱等价.

定理 3. 设 $R \rightarrow S \rightarrow T$ 是交换环的映射, 那么

$$s(T)_* \otimes \mathcal{L}_{S/R} \rightarrow \mathcal{L}_{T/R} \rightarrow \mathcal{L}_{T/S}$$

是单纯 $s(T)_*$ 模的余纤维序列, 于是对任意的 T 模 P , 存在 T 模长正合序列

$$\cdots \rightarrow D_1(S/R, M) \rightarrow D_1(T/R, M) \rightarrow D_1(T/S, M) \rightarrow P \otimes_T \Omega_{S/R} \rightarrow P \otimes_T \Omega_{T/R} \rightarrow P \otimes_T \Omega_{T/S} \rightarrow 0,$$

特别地, 当 $M = T$ 时, 这个序列是相对余切序列的延伸.

定理 4. 交换环的态射 $f : R \rightarrow S$ 是光滑的当且仅当 $L_{S/R} \rightarrow \Omega_{S/R}$ 是弱等价且 $\Omega_{S/R}$ 是投射 S 模. 特别地, f 是平展的当且仅当 $L_{S/R}$ 只有平凡上同调.

定理 5 (第一消去定理).

以上的三个定理证明都需要用到模型范畴, 我们略过.

除此之外, 我们还有一种对余切复形更加范畴化的构造方式, 它来源于 Quilen. 定理3告诉我们, $L_{A/R}$ 事实上是 $\Omega_{A/R}$ 的导出函子, 但在之前的构造我们并没有用同调代数中已经存在的结果, 这主要的原因是范畴 $R - \mathbf{Algebra}$ 不是一个 Abel 范畴 (原因: 一个 R 代数同态 $f : A \rightarrow B$ 没有核). Quilen 的想法是将这个范畴 “Abel 化”, 这就是在后面讨论的内容. 引理3在另一方面说明范畴 $R - \mathbf{Algebra}$ 不是合适的范畴.

我们尝试用两个例子说明这样的考虑是合适的: 考虑 Y 是一个拓扑空间, X 是它的 CW 逼近. 令 $\text{Ab}(X)$ 是 X 上的自由拓扑 Abel 群, 那么 Dold-Thom 定理说明

$$\pi_*(\text{Ab}(X)) \cong H_*(X) \cong H_*(Y).$$

注意到我们在求 $\text{Ab}(-)$ 之前必须要找一个 CW 逼近, 用模型范畴的语言来说, 这是一个余纤维替代 (cofibrant replacement). 所以我们可以把奇异复形看作 $\text{Ab}(-)$ 的导出函子. 另一个例子来源于单纯代数的同伦群, Dold-Kan 对应说明一个单纯代数 A_* 的同伦群与它的 Abel 化的同调群是一样的. 这里我们不需要取余纤维替代, 只是因为单纯代数的范畴中所有的对象都是余纤维.

定义. 设 \mathcal{C} 是一个范畴, 若 \mathcal{C} 中的对象 A 满足函子 $\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 可以分解为

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab} \xrightarrow{U} \mathbf{Set},$$

则称 A 是 Abel 群对象 (abelian group object). 对 Abel 群对象 A, B , 态射 $f : A \rightarrow B$ 若满足对任意 \mathcal{C} 中的对象 C , 映射

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(C, f) : \text{hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$$

都是群同态, 则称 f 是 Abel 群对象态射 (a morphism of abelian group objects).

对范畴 \mathcal{C} 记它的 Abel 群对象和 Abel 群对象态射组成的范畴为 \mathcal{C}_{ab} .

引理 2. 对任意范畴 \mathcal{C} ,

$$s(\mathcal{C}_{\text{ab}}) \simeq (s\mathcal{C})_{\text{ab}}.$$

练习 2. 设范畴的嵌入 $\mathcal{C}_{\text{ab}} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 有左伴随 $\text{Ab} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{ab}}$, 那么嵌入 $s\mathcal{C}_{\text{ab}} \hookrightarrow s\mathcal{C}$ 也有左伴随, 在每一层都是 Ab .

定义. 设 \mathcal{C} 是一个模型范畴, 且 \mathcal{C}_{ab} 上也有模型范畴结构, 满足 $\mathcal{C}_{\text{ab}} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是右 Quillen 伴随, 有左 Quillen 伴随 $\text{Ab} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{ab}}$, 称为 Abel 化 (abelianisation).

引理 3. $R - \mathbf{Algebra}$ 中的 Abel 群对象只有零代数.

设 R 是给定的交换环, A 是给定的 R 代数, 接下来我们的讨论都限定在范畴 $R - \mathbf{Algebra}/A$ 中, 即所有的 R 代数映射 $f : B \rightarrow$ 的全体. 考虑函子

$$\begin{aligned} \ltimes : A - \mathbf{Mod} &\rightarrow R - \mathbf{Algebra}/A \\ M &\mapsto A \ltimes M, \end{aligned}$$

其中, $A \ltimes M$ 作为 A 模是 $A \oplus M$, 且乘法满足

$$(a, m) \cdot (b, n) := (ab, an + bm).$$

命题 6. 函子 $\ltimes : A - \mathbf{Mod} \rightarrow R - \mathbf{Algebra}/A$ 有分解 $A - \mathbf{Mod} \rightarrow (R - \mathbf{Algebra}/A)_{\text{ab}} \hookrightarrow R - \mathbf{Algebra}/A$, 并且给出了范畴的等价

$$A - \mathbf{Mod} \simeq (R - \mathbf{Algebra}/A)_{\text{ab}}.$$

证明. □

定理 7.

$$\Omega_{-/R} \otimes_{-} A : R - \mathbf{Algebra}/A \leftrightarrows A - \mathbf{Mod} : \ltimes$$

是一对伴随函子.

于是根据练习2, 这个伴随可以扩张到

$$s(R - \mathbf{Algebra}/A) \leftrightarrows s(A - \mathbf{Mod}).$$

在给定两个范畴正确的模型范畴结构后, 可以证明

引理 4. 上述提到的左右伴随函子都是 Quillen 伴随.

定义. 余切复形函子是全左导出函子

$$\mathcal{L}\text{Ab} : D(s(R - \mathbf{Algebra}/A)) \rightarrow D(s(A - \mathbf{Mod})).$$

R 代数 A 的余切复形是

$$\mathcal{L}_{A/R} := \mathcal{L}\text{Ab}(s(A)_*).$$

1 一些计算

余切复形的计算是非常困难的，这其中最根本的原因在于单纯预解是非常大的，里面包含了非常多的信息

例 2. 设 k 是一个域， $k[\epsilon] = k[x]/(x^2)$ 且 $k[\epsilon] \rightarrow k$ 是一阶加厚，那么我们有正合列

$$0 \rightarrow (\epsilon) \rightarrow k[\epsilon] \rightarrow k \rightarrow 0.$$

回顾给定的 Noether 环同态 $f : R \rightarrow S$

2 形变理论

定义 (Tag 04EW). 1. 给定概型 Y ，若概型 $X \rightarrow Y$ 是闭子概型且 X 与 Y 有相同的底空间 (underlying space)，则称 Y 是 X 的加厚 (thickening).

2. 若 Y 是 X 的加厚，且 $X \hookrightarrow Y$ 的定义理想层 \mathcal{I} 满足 $\mathcal{I}^2 = 0$ ，则称 Y 是 X 的一阶加厚 (first order thickening).
3. 给定两个加厚 $X \hookrightarrow Y, Z \hookrightarrow W$ ，若态射 $f : Y \rightarrow W$ 满足 $f|_X$ 是态射 $X \rightarrow Z$ ，则称 $(f, f|_X) : (X \subseteq Y) \rightarrow (Z \subseteq W)$ 是加厚的态射 (morphism of thickenings).
4. 类似地可以定义 S 上的概型的加厚和加厚的态射，这只要把以上定义中的概型和映射换为 \mathbf{Sch}/S 中的对象和映射即可.

引理 5.

定义. 设 $S \hookrightarrow T$ 是一阶加厚，且 $f : X \rightarrow S$ 是概型的态射. 若 X 的一阶加厚 X' 满足存在平坦态射 $g : X' \rightarrow T$ 使得图

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ S & \longrightarrow & T, \end{array}$$

交换且是拉回，则称 X' 是 X 的形变 (deformation).

练习 3 (Tag 08KY). 记 \mathcal{I}, \mathcal{J} 分别是一阶加厚 $S \hookrightarrow T$ 和 $X \hookrightarrow X'$ 的定义层，那么存在自然的 \mathcal{O}_X 模态射 $f^*\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$. 求证态射 $f^*\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ 是满态射当且仅当定义中的交换图是拉回，且在此情况下， $f^*\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ 是同构当且仅当 g 是平坦的.

定理 8 (Tag 08UX). 设 $S \hookrightarrow T$ 是由 \mathcal{I} 定义的一阶加厚, $f : X \rightarrow S$ 是概型的态射.

1. 存在自然的元素 $o(f) \in \mathrm{Ext}_X^2(L_{X/S}, f^*\mathcal{I})$, 满足形变存在当且仅当 $o(f) = 0$.

元素 $o(f)$ 被称为 (obstruction class)