Geometric Invariant Theory

Guanyu Li

目录

1 代数几何预备知识

引理 1.1. 给定R代数A和R模M，R代数态射

$$\iota_1, \iota_2 : A \to A \otimes_R A$$

定义为$\iota_1(a) := a \otimes 1, \iota_2(a) := 1 \otimes a$，若$A$是忠实平坦的$R$代数，那么

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha_M} A \otimes_R M \xrightarrow{(\iota_1 - \iota_2)\otimes \mathrm{id}_M} A \otimes_R A \otimes_R M$$

是正合列.

证明. 按定义，$\alpha_M : m \mapsto 1 \otimes m$，$(\iota_1 - \iota_2) \otimes \mathrm{id}_M : a \otimes m \mapsto a \otimes 1 \otimes m - 1 \otimes a \otimes m$.设$m \in M$使得$\alpha_M(m) = 1 \otimes m = 0$，取$M$中的子模$\langle m \rangle$，根据$A$的$R$平坦性$A \otimes_R \langle m \rangle$是$A \otimes_R M$的子模，并且$1 \otimes m = 0$说明$A \otimes_R \langle m \rangle = 0$.但$A$是忠实平坦的，因此$\langle m \rangle = 0$，即$\alpha_M$是单射.

由定义显然$\mathrm{Im}\ \alpha_M \subseteq \mathrm{Ker}\ (\iota_1 - \iota_2) \otimes \mathrm{id}_M$.对于序列

$$0 \to A \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \alpha_M} A \otimes_R A \otimes_R M \xrightarrow{(\iota_1^* - \iota_2^*)\otimes \mathrm{id}_M} (A \otimes_R A) \otimes_A (A \otimes_R A) \otimes_R M,$$

也相应有$\mathrm{Im}\ \mathrm{id}_A \otimes \alpha_M \subseteq \mathrm{Ker}\ (\iota_1^* - \iota_2^*) \otimes \mathrm{id}_M$，其中$(\iota_1^* - \iota_2^*) \otimes \mathrm{id}_M : \sum_{i=1}^K a_i \otimes b_i \otimes m_i \mapsto \sum_{i=1}^K a_i \otimes 1 \otimes b_i \otimes 1 \otimes m_i - \sum_{i=1}^K a_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes b_i \otimes m_i$.根据$\alpha : R \to A$的平坦性，$\mathrm{id}_A \otimes \alpha_M$也是单射且注意到存在$A$代数同态$m : A \otimes_R A \to A, a \otimes b \mapsto ab$，使得复合映射$A = R \otimes_R A \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}_A} A \otimes_R A \xrightarrow{m} A$是恒同映射$\mathrm{id}_A : A \to A$，那么对于任意满足

$$((\iota_1^* - \iota_2^*) \otimes \mathrm{id}_M) \left(\sum_{i=1}^K a_i \otimes b_i \otimes m_i \right) = \sum_{i=1}^K a_i \otimes 1 \otimes b_i \otimes 1 \otimes m_i - \sum_{i=1}^K a_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes b_i \otimes m_i = 0$$

的元素$\sum_{i=1}^K a_i \otimes b_i \otimes m_i$，

$$m \otimes \mathrm{id}_{A \otimes_R A \otimes_R M} : (A \otimes_R A) \otimes_A (A \otimes_R A) \otimes_R M \to A \otimes_A (A \otimes_R A) \otimes_R M \cong (A \otimes_R A) \otimes_R M$$
$$\sum_{i=1}^K a_i \otimes 1 \otimes b_i \otimes 1 \otimes m_i \mapsto \sum_{i=1}^K m(a_i \otimes b_i) \otimes 1 \otimes m_i$$
$$\sum_{i=1}^K a_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes b_i \otimes m_i \mapsto \sum_{i=1}^K a_i \otimes b_i \otimes m_i,$$

其中两个映射关系是选取了同一元素的不同代表元，这意味着$\sum_{i=1}^K a_i \otimes b_i \otimes m_i = \sum_{i=1}^K m(a_i \otimes b_i) \otimes 1 \otimes m_i$，因此$\sum_{i=1}^K a_i \otimes b_i \otimes m_i = \alpha_M(\sum_{i=1}^K m(a_i \otimes b_i) \otimes 1 \otimes m_i)$，即$\mathrm{Im}\ \alpha_M = \mathrm{Ker}\ (\iota_1 - \iota_2) \otimes \mathrm{id}_M$.同时，$A$代数同构$c : (A \otimes_R A) \otimes_A (A \otimes_R A) \otimes_R M \to A \otimes_R (A \otimes_R A) \otimes_R M, \sum_{i=1}^K x_i \otimes y_i \otimes z_i \otimes w_i \mapsto \sum_{i=1}^K x_i \otimes y_i z_i \otimes w_i$???????使得图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A\otimes_R M & \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\alpha_M} & A\otimes_R A\otimes_R M & \xrightarrow{(\iota_1^*-\iota_2^*)\otimes \mathrm{id}_M} & (A\otimes_R A)\otimes_A (A\otimes_R A)\otimes_R M \\ & & \| & & \| & & \downarrow c \\ 0 & \longrightarrow & A\otimes_R M & \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\alpha_M} & A\otimes_R A\otimes_R M & \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes(\iota_1-\iota_2)\otimes \mathrm{id}_M} & A\otimes_R (A\otimes_R A)\otimes_R M \end{array}$$

交换，这样第一行的正合性就意味着第二行的正合性，因此根据A的忠实平坦性

$$0\to M\xrightarrow{\alpha_M} A\otimes_R M\xrightarrow{(\iota_1-\iota_2)\otimes\mathrm{id}_M} A\otimes_R A\otimes_R M$$

是正合列. □

命题 1.1. 给定仿射概型$X=\mathrm{Spec}\ R$，且设$f:U=\mathrm{Spec}\ T\to V=\mathrm{Spec}\ S$是仿射概型间的忠实平坦态射，那么

$$h_X(V)\longrightarrow h_X(U)\underset{\mathrm{pr}_2^*}{\overset{\mathrm{pr}_1^*}{\rightrightarrows}} h_X(V\times_U V)$$

是等值子.

证明. 设f对应的环同态是$\varphi:S\to T$，那么$h_X(f)=-\circ f:h_X(V)\to h_X(U)$对应到

$$\varphi\circ-:\mathrm{Hom}(R,S)\to\mathrm{Hom}(R,T).$$

由引理1.1（取S模S和S代数T），有正合列

$$0\to S\xrightarrow{\alpha_S} T\xrightarrow{\iota_1-\iota_2} T\otimes_S T$$

注意到pr_i对应到ι_i（$i=1,2$），于是$\mathrm{pr}_i^*=\iota_i\circ-$，故函子$\mathrm{Hom}(R,-)$作用在如上正合列恰好得到需要的结果. □

命题 1.2. 设$f:Y\to X,g:Z\to X$是概型的态射，满足存在$y\in Y,z\in Z$使得$f(y)=g(z)$，那么存在$p\in Y\times_X Z$满足$\mathrm{pr}_1(p)=y,\mathrm{pr}_2(p)=z$.

证明. 令$\kappa(x):=\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$，于是我们有域扩张$\kappa(x)\hookrightarrow\kappa(y)$和$\kappa(x)\hookrightarrow\kappa(z)$.进而$\kappa(y)\otimes_{\kappa(x)}\kappa(z)$是非零的，故存在极大理想$\mathfrak{m}$，令$K:=\kappa(y)\otimes_{\kappa(x)}\kappa(z)/\mathfrak{m}$，则$K$是$\kappa(x)$的包含$\kappa(y)$和$\kappa(z)$的扩张.

设U是X中包含x的仿射概型，那么

$$\mathrm{Spec}\ K\to\mathrm{Spec}\ \kappa(y)\to Y\xrightarrow{f} X$$

和

$$\mathrm{Spec}\ K\to\mathrm{Spec}\ \kappa(z)\to Z\xrightarrow{g} X$$

相同，故我们得到了映射$\mathrm{Spec}\ K\to Y\times_X Z$. □

2 一般的模问题

模问题(moduli problem)是代数几何当中一类最基本的问题.

定理 2.1. 设k是域，S是k概型，那么存在如下的1-1对应

$$\{(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n) \mid \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S), s_i \in H^0(S, \mathcal{L})\text{生成}\mathcal{L}\}/\sim \leftrightarrow \hom_k(S, \mathbb{P}^n),$$

其中左边的等价关系$(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n) \sim (\mathcal{M}, t_0, \cdots, t_n)$定义为存在同构$\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$使得$t_i = \varphi(s_i)$.给定$(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n)$，那么它对应的态射是$f: S \to \mathbb{P}^n, P \mapsto [s_0(P), \cdots, s_n(P)]$，反过来给定一个态射$f: S \to \mathbb{P}^n$，取$\mathcal{L} := f^*\mathscr{O}(1)$，$s_i := f^*(x_i)$.

事实上很难给出模问题的准确的定义，但一般一个反变函子

$$\mathcal{M}: \mathbf{Sch}_{/S} \to \mathbf{Set}$$

给的想要参数化的对象，这个反变函子就称为一个模问题.下面的例子是我们主要考虑的：

例 1. 考虑函子

$$\mathcal{M}: \mathbf{Sch}_{/S} \to \mathbf{Set}$$

$$X \mapsto \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] \\ X \arrow[u, bend right, "t"'] \end{tikzcd} & p\text{是平坦态射，在每一点的纤维都是亏格为1的曲线，且}p \circ t = \mathrm{id}_S \end{array} \right\},$$

若$f: X \to Y$是概型的态射，$\mathcal{M}(f)$由下图给出

$$\begin{tikzcd} E \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

例 2. 考虑函子

$$\mathcal{M}: \mathbf{Sch}_{/S} \to \mathbf{Set}$$

$$X \mapsto \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{tikzcd} C \arrow[d, "p"'] \\ X \end{tikzcd} & \text{对}X\text{的每一点}x\text{，纤维}C_x\text{是几何连通、正规、光滑且亏格为}g\text{的曲线} \end{array} \right\},$$

定理 2.2. 设E_1, E_2是两个k上的椭圆曲线，则

定义. 给定函子$\mathcal{M}: \mathbf{Sch}^\circ \to \mathbf{Set}$和$k$概型$M$，若

1. 存在自然态射$\eta: \mathcal{M} \Rightarrow \hom_{\mathbf{Sch}}(-, M)$使得对任意的$\xi: \mathcal{M} \Rightarrow \hom_{\mathbf{Sch}}(-, X)$，都存在唯一的$f: X \to M$满足下图交换：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\xi"'] & \hom_{\mathbf{Sch}}(-, M) \arrow[d, dashed, Rightarrow, "\hom_{\mathbf{Sch}}(-, f)"] \\ & \hom_{\mathbf{Sch}}(-, X). \end{tikzcd}$$

2. 对任意包含k的代数闭域K，

$$\eta_K: \mathcal{M}(\mathrm{Spec}\ K) \to \hom_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}\ K, M)$$

都是一个双射，

那么称M是$\mathcal{M}$的一个粗模空间.

3 几种不同的商

接下来我们会一直有如下假定：给定一个概型S，我们考虑范畴$\mathbf{Sch}_S$中的群对象G/S，如果作为概型G是光滑的，则称G是一个S上的代数群(algebraic group).

当给定一个代数群时，它上的乘法$\mu : G\times G\to G$给出了一个环同态$\mu^{\#} : \mathscr{O}_G(G)\to\mathscr{O}_G(G)\otimes_k\mathscr{O}_G(G)$，它满足相应的（余）结合性，于是这使得$\mathscr{O}_G(G)$是一个余代数，同时$\mathscr{O}_G(G)$还是一个代数，它的乘法和余乘法相容，因此$\mathscr{O}_G(G)$被称为一个Hopf代数.

例 3. *假设k是域，$S := \operatorname{Spec} k$，那么以下是代数群：*

1. *$\mathbb{G}_a := \operatorname{Spec} k[x]$.其中，$\mu^{\#}$定义为$x\mapsto 1\otimes x+x\otimes 1$，$i^{\#}$定义为$x\mapsto -x$，我们举例说明它们满足群公理.由于*

$$((\mu^{\#}\circ\mathrm{id})\circ\mu^{\#})(x)=(\mu^{\#}\circ\mathrm{id})(1\otimes x+x\otimes 1)=1\otimes x+x\otimes 1$$

   且

2. *$\mathbb{G}_m := \operatorname{Spec} k[t,t^{-1}]$.*

3. *$GL_n := \operatorname{Spec} k[x_{i,j},\det^{-1}]_{1\le i,j\le n}$.*

4. *$SL_n = \operatorname{Spec} k[x_{i,j},]_{1\le i,j\le n}/(\det -1)$.*

5. *任意给定有限Abel群G，那么$k[G]$是k上的代数（也是Hopf代数），*

6. *任意给定有限群G，它一定是一个置换群$\mathfrak{S}_n$的子群，而$\mathfrak{S}_n$是GL_n的子群，那么如果我们可以将$\mathfrak{S}_n$写为代数群那么任意有限群都是代数群.具体的步骤在习题3.1中.*

7. *按照点函子的观点，给定一个k上的代数群就给定了一个函子$R-\mathbf{Alg}\to\mathbf{Set}$，$R\mapsto G(R)$，且$G(R)$是一个群.给定$k$向量空间$V$，考虑函子$R\mapsto\operatorname{Aut}_R(V\otimes_k R)$，那么这给出了一个代数群，记为$GL(V)$.*

事实上，从函子的角度$\mu^{\#} : \mathscr{O}_G(G)\to\mathscr{O}_G(G)\otimes_k\mathscr{O}_G(G)$的定义如下：给定测试概型$T=\operatorname{Spec} R$，那么一个$G$的$T$点$x : T\to G$对应于$x^{\#} : \mathscr{O}_G(G)\to R$，那么给定两个$T$点$x,y : T\to G$，由于$\hom_{k-\mathbf{Alg}}(\mathscr{O}_G(G),R)$是群，因此$x\cdot y\in\hom_{\mathbf{Sch}_k}(T,G)$，那么它对应的$\hom_{k-\mathbf{Alg}}(\mathscr{O}_G(G),R)$是

$$\mathscr{O}_G(G)\xrightarrow{\mu^{\#}}\mathscr{O}_G(G)\otimes_k\mathscr{O}_G(G)\xrightarrow{x^{\#}\otimes y^{\#}}R,$$

这样就唯一确定了$\mu^{\#}$.

习题 3.1. 这个习题中我们证明存在GL_n的子群$\mathfrak{S}_n$是一个k上的代数群，具体的嵌入是将$\mathfrak{S}_n$对应到GL_n中的置换矩阵.

1. 对任意$\sigma\in\mathfrak{S}_n$，定义$k[x_{i,j},]_{1\le i,j\le n}$中的理想

$$I_\sigma := (\{x_{i,\sigma(i)}-1\}_{1\le i\le n},\{x_{i,j}\}_{1\le i,j\le n,j\ne\sigma(i)}),$$

   求证$k[x_{i,j},]_{1\le i,j\le n}/I_\sigma\cong k$.

2. 求证
$$k[\mathfrak{S}_n] := k[x_{i,j},]_{1\le i,j\le n} \Big/ \bigcap_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} I_\sigma$$
是Artin环，且有$n!$个k点.

3. 在Spec $k[\mathfrak{S}_n]$上定义乘法使得它作为一个群同构于$\mathfrak{S}_n$.[提示：考虑$k[\mathfrak{S}_n]$作为Artin环的分解.]

4. 证明Spec $k[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$是Spec $k[\mathfrak{S}_n]$的子群，于是这个定义包含了之前关于有限Abel群的定义.

习题 3.2. 设$G=\mathbb{G}_m^n(k)$是n维环，证明$\mathscr{O}_G$上模的范畴与$\mathbb{Z}^n$分次k向量空间的范畴等价.

定义. 设G是代数群，一个G的表示(representation)就是一个态射$\rho : G\to GL_n$，且满足如下交换图

$$\begin{tikzcd}
G\times_S G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\rho\times\rho"'] & G \arrow[d, "\rho"] \\
GL_n\times_S GL_n \arrow[r, "m"] & GL_n,
\end{tikzcd}$$

其中μ是G中的乘法，m是GL_n中的乘法.

假设G是线性代数群，$S:=\Gamma(G,\mathscr{O}_X)$，那么群乘法自然诱导了一个环同态$\hat{\mu}: S\to S\otimes_k S$，单位态射诱导了$\hat{i}: S\to k$，因此对任意一个$k$向量空间$V$，我们可以定义$G$在$V$上的对偶作用为线性空间的同态

$$\hat{\sigma}: V\to S\otimes_k V,$$

满足

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\hat{\sigma}"'] & S\otimes_k V \arrow[d, "\hat{\mu}\otimes \mathrm{id}_V"] \\
S\otimes_k V \arrow[r, "\mathrm{id}_S\otimes\hat{\sigma}"] & S\otimes_k S\otimes_k V
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_V"'] & S\otimes_k V \arrow[r, "\hat{i}\otimes \mathrm{id}_V"] & V
\end{tikzcd}$$

定义. 设G是代数群，$\hat{\sigma}$是G在V上的对偶作用，若V的子空间W满足$\hat{\sigma}(W)\subseteq S\otimes_k W$，则称$W$是$V$的不变子空间(invariant subspace).

引理 3.1. *设G是代数群，$\hat{\sigma}$是G在V上的对偶作用，那么V是自己有限维不变子空间的并(逆极限).*

给定代数群G在概型X上的作用σ，那么存在一个k代数的同态

$$\sigma^*: \mathscr{O}_X(X)\to \mathscr{O}_{G\times X}(G\times X)\cong \mathscr{O}_G(G)\otimes_k \mathscr{O}_X(X)$$
$$f\mapsto \sum_{i=1}^N h_i\otimes f_i$$

这给出了群态射$G\to \mathrm{Aut}(\mathscr{O}_X(X))$，对于每个$g\in G$，

$$f\mapsto \sum_{i=1}^N h_i(g)f_i.$$

定义. 设G是一个k上的代数群，V是k线性空间，那么G在V上的作用是如下的信息，对任意的k代数R，都有$G(R)$在$V\otimes_k R$上的作用

$$\sigma_R : G(R)\times(V\otimes_k R)\to V\otimes_k R,$$

对任意$g\in G(R)$，$\sigma_R(g,-)$都是一个R模同态，而且σ_R关于R是自然的.

引理 3.2. *设G是仿射代数群，作用在仿射概型X上，那么对于任意$f\in\mathscr{O}_X(X)$，存在一个有限维的G等变子空间$W\subseteq\mathscr{O}_X(X)$包含$f$.*

证明. 记$\sigma : G\times X\to X$是给定的作用，那么$\sigma^* : \mathscr{O}_X(X)\to\mathscr{O}_G(G)\otimes_k\mathscr{O}_X(X)$是对偶作用.若有$\sigma^*(f)=\sum_{i=1}^N h_i(g)f_i$，那么 □

定理 3.1. *任意k上的仿射代数群都是线性仿射代数群.*

定义. 设G作用在概型X上，T是另一个概型，$f : T\to X$是一个T值点，那么我们有映射$G\times_S T\xrightarrow{\mathrm{id}_G\times f} G\times_S X\xrightarrow{\sigma} X$，进而可以定义

$$\psi_f^G : G\times_S T\to G\times_S T$$

为$(\sigma\circ(\mathrm{id}_G\times f),p_2)$，简记为$\psi_f$.我们称$\psi_f$的像为$f$的轨道(orbit)，记为$o(f)$.另一方面，$X\times_S T$是$T$上的概型，于是我们自然地有截面

$$(f,\mathrm{id}_T) : T\to X\times_S T.$$

我们定义$S(f)$为纤维积

$$\begin{tikzcd} S(f) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "{(f,\mathrm{id}_T)}"] \\ G\times_S T \arrow[r, "\psi_f"] & X\times_S T, \end{tikzcd}$$

这是G的子群，称为f的(stabilizer).

命题 3.2. *设G作用在概型X上.那么*

定义. 给定代数群G在概型X上的作用σ，若

定义. 给定$\mathbf{Sch}_S$中的群作用$\sigma : G\times_S X\to X$，若存在$S$上的态射$\varphi : X\to Y$满足

1. 有交换图：

$$\begin{tikzcd} G\times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y, \end{tikzcd}$$

2. Y在上图意义下具有泛性质，即若有S上的概型Z和态射$\phi : X\to Z$满足图

$$\begin{tikzcd} G\times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Z, \end{tikzcd}$$

交换，则存在唯一的态射$\chi : Y \to Z$使得$\phi = \chi \circ \varphi$，

那么称Y是G作用在X上的一个范畴商(categorical quotient).

换言之，G作用在X上的范畴商是作用映射和投影映射的推出.

定义. 给定$\mathbf{Sch}_S$中的群作用$\sigma : G \times_S X \to X$，若存在$S$上的态射$\varphi : X \to Y$满足

1. 有交换图：

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y, \end{array}$$

2. φ是满态射，且

$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times_S X \to X \times_S X$$

   的像是$X \times_Y X$，

3. φ是拓扑商，也就是说，$U \subseteq Y$是开集当且仅当$\varphi^{-1}(U) \subseteq X$是开集，

4. Y的结构层$\mathscr{O}_Y$是$\varphi_*\mathscr{O}_X$的包含不变函数的子层，即对于$f \in \Gamma(U, \varphi_*\mathscr{O}_X) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathscr{O}_X)$是$\Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$的元素当且仅当下图交换

$$\begin{array}{ccc} G \times_S \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & \varphi^{-1}(U) \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{F} & \mathbb{A}^1, \end{array}$$

   其中F是f对应的态射，

那么称Y是G作用在X上的一个几何商(geometric quotient).

定义. 给定$\mathbf{Sch}_S$中的群作用$\sigma : G \times_S X \to X$和作用的范畴/几何商$\varphi : X \to Y$，若对任意$f : Y' \to Y$，下面的纤维积

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \longrightarrow & Y' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

都使f'是一个范畴/几何商，则称Y是万有范畴/几何商(universal - quotient).若以上只对平坦(flat)的成立，则称Y是一致范畴/几何商(uniform - quotient)

命题 3.3. *设$\varphi : X \to Y$是G作用在X上的几何商，那么$\varphi : X \to Y$也是范畴商.*

命题 3.4. *设X, Y都是S上的不可约、正规、Noetherian概型，$\varphi : X \to Y$是有限型的、dominating态射，Y中generic point的剩余域是特征0的，*

4 可约（reductive）代数群

定义. 设G是代数群，若它的radical是一个环（torus），那么称G是reductive的.

定理 4.1. *设X是k上的仿射概形，G是可约代数群，且$\sigma : G \times_k X \to X$是$G$在$X$上的作用.那么作用存在一致范畴商$(Y, \varphi)$，且$\varphi$是universially submersive，且Y是仿射概形.若X还是代数的，那么Y也是k上代数的.*

5 GIT商

6 空间和层

6.1 拓扑和位形

习题 6.1. $U \cap V = U \times_X V$.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$，那么$\mathcal{C}$上的Grothendieck拓扑(Grothendieck topology)是对于$\mathcal{C}$中任意对象U都给定的一个态射族$\{U_i \to U\}_{i\in I}$的全体$\mathrm{Cov}(U)$的集合（注意$\mathrm{Cov}(U)$不是一族态射集而是一些态射族组成的集合），满足

1. 任意同构$\{V \to U\}$都在$\mathrm{Cov}(U)$中，
2. 若$\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$，那么对于$\mathcal{C}$中的任意态射$W \to U$，$U_i \times_U W$存在且$\{U_i \times_U W \to W\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(W)$，
3. 若$\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$，那么对任意$i \in I$和$\{U_{i,j} \to U_i\}_{j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(U_i)$，那么
$$\{U_{i,j} \to U_i \to U\}_{i\in I, j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(U).$$

称若$\mathrm{Cov}(U)$中的态射族为U的开覆盖(covering of U).范畴$\mathcal{C}$与上面的拓扑信息合称为一个位形(site).

例 4 (经典拓扑)**.** *给定拓扑空间X，记$\mathbf{Open}(X)$是X对应的开集范畴，对任意开集$U \subseteq X$，定义*
$$\mathrm{Cov}(U) := \left\{ \{U_i \to U\}_{i\in I} \middle| \bigcup_{i\in I} U_i = U \right\},$$
这构成了一个位形.特别地，若X是一个概型，那么X的开子集都是概型，这称为X的（小）Zariski位形(small Zariski site).

与上面做对比，考虑范畴$\mathbf{Top}$，对任意拓扑空间X，定义
$$\mathrm{Cov}(X) := \left\{ \{X_i \to X\}_{i\in I} \middle| X_i \to X\text{是开集的嵌入且}\bigcup_{i\in I} X_i = X \right\},$$
那么这给出了（经典的）$\mathbf{Top}$上的拓扑.类似地取范畴$\mathbf{Sch}$，对任意的概型X定义
$$\mathrm{Cov}(X) := \{\{X_i \to X\}_{i\in I} \mid X_i \to X\text{是开子概型且}\bigcup_{i\in I} X_i = X\},$$
这称为$\mathbf{Sch}$上的大Zariski位形(big Zariski site).

习题 6.2. 给定位形$\mathcal{C}$，那么对于任意$\mathcal{C}$中的对象X，如下定义给出了$\mathcal{C}/X$上的拓扑：对任意$\mathcal{C}/X$中的对象$Y \to X$，

$$\mathrm{Cov}(Y \to X) := \{\{Y_i \to Y\}_{i\in I} \mid Y_i \to Y \in \mathrm{mor}\,\mathcal{C}/X, \{Y_i \to Y\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(Y)\}.$$

这样给出的位形称为$\mathcal{C}$的局部位形(licalized site).

例 5. 事实上，给定位形$\mathcal{C}$和图$D : J \to \mathcal{C}$，可以定义范畴$\mathcal{C}/J$，满足

$$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}/J := \{(j, A \to F(j)) \mid j \in \mathrm{ob}\,J, A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}\},$$

并且$\hom((j_1, A_1 \to F(j_1)), (j_2, A_2 \to F(j_2)))$中的元素是态射对$(f, \tilde{f})$，满足

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \\ F(j_1) \arrow[r, "F(f)"] & F(j_2), \end{tikzcd}$$

此时给定$\mathcal{C}/J$中的对象$(j, A \to F(j))$，$\mathcal{C}/J$中的态射的全体

$$\{\{(j_i, A_i) \xrightarrow{(f_i,\tilde{f}_i)} (j, A)\}_{i\in I} \mid f_i : j_i \to j\text{是同构且}\{A_i \xrightarrow{\tilde{f}_i} A\}_{i\in I}\text{是}A\text{的覆盖}\}$$

给出了$\mathrm{Cov}(j, A \to F(j))$.

习题 6.3. 求证Grothendieck拓扑等价于$(\mathcal{C}, \tau)$，τ给出了对应$X \mapsto \mathrm{Cov}(X)$，其中$\mathrm{Cov}(X)$是$X$上的一族筛(sieves)，满足

1. 对任意的对象X，$h_X \in \mathrm{Cov}(X)$，
2. 对任意的态射$f : X \to Y$和$u \in \mathrm{Cov}(X)$，$u \times_{h_X} h_Y \in \mathrm{Cov}(X)$，
3. 对任意的态射$f : X \to Y$和$u \in \mathrm{Cov}(X)$，若对任意$Y \in \mathcal{C}, f \in \mathrm{Cov}(Y)$都有$f^*(V) \in \mathrm{Cov}(Y)$，则$V \in \mathrm{Cov}(X)$.

例 6. 给定概型X，设范畴$\mathbf{Sch}_{/X}^{\acute{e}t}$是范畴$\mathbf{Sch}_{/X}$中所有平展态射组成的满子范畴，对任意对象$U \to X$，

$$\mathrm{Cov}(U) := \left\{ \{U_i \to U\}_{i\in I} \middle| \coprod_{i\in I} U_i \to U\text{是满射} \right\}$$

给出了$\mathbf{Sch}_{/X}^{\acute{e}t}$上的小平展位形*(small étale site)*.对于范畴$\mathbf{Sch}_{/X}$，

$$\mathrm{Cov}(U) := \left\{ \{U_i \to U\}_{i\in I} \middle| \coprod_{i\in I} U_i \to U\text{是满射且每个}U_i \to U\text{都是平展的} \right\}$$

给出了其上的平展位形*(étale site)*.

例 7 (fppf(fidèlement plat de présentation finie)位形)**.** 给定概型X，范畴$\mathbf{Sch}_{/X}$，

$$\mathrm{Cov}(U) := \left\{ \{U_i \to U\}_{i\in I} \middle| \coprod_{i\in I} U_i \to U\text{是满射，每个}U_i \to U\text{都是平坦且局部有限展示（因此是忠实满射的）的} \right\}$$

给出了其上的*fppf*位形*(fppf site)*，记为$(\mathbf{Sch}_{/X})_{\mathrm{fppf}}$.

例 8 (fpqc(fidèlement plate et quasi-compacte)位形)**.** 给定概型X，范畴$\mathbf{Sch}_{/X}$.若开覆盖$\mathcal{U}=\{U_i\to U\}_{i\in I}$满足对$U$的任意仿射开子概型$V$，都存在**有限**集$J$和$\lambda: J\to I$，对所有$j\in J$都有$U_{\lambda(j)}$的仿射开子概型$V_{\lambda(j)}$满足$\coprod_{j\in J}V_{\lambda(j)}\to V$是满射，则称该开覆盖是拟紧*(quasi-compact)*的.那么

$$\mathrm{Cov}(U):=\left\{\{U_i\to U\}_{i\in I}\middle|\coprod_{i\in I}U_i\to U\text{是满射，每个}U_i\to U\text{都是平坦的且开覆盖是拟紧的}\right\}$$

给出了其上的*fpqc位形(fpqc site)*，记为$(\mathbf{Sch}_{/X})_{\mathrm{fpqc}}$.

习题 6.4. 求证若$\mathcal{U}=\{U_i\to U\}_{i\in I}$是位形$(\mathbf{Sch}_{/X})_{\mathrm{fpqc}}$中的开覆盖，那么$\{\coprod_{i\in I}U_i\to U\}$也是$(\mathbf{Sch}_{/X})_{\mathrm{fpqc}}$中的开覆盖.

习题 6.5. 给定位形$(\mathcal{C},\tau)$，对任意态射的集合$\mathcal{U}:=\{U_i\to U\}_{i\in I}$，若$\mathcal{U}$的加细在$\tau$中则$\mathcal{U}$也在$\tau$中，则称拓扑$\tau$是饱和的(saturated).对任意的位形$(\mathcal{C},\tau)$，它的饱和化(saturation)$\bar{\tau}$是加细在$\tau$中的所有态射的集合.求证：

1. 任意拓扑τ的饱和化是饱和的，
2. τ的饱和化$\bar{\tau}$与τ是等价的拓扑，
3. $T\subseteq\bar{\tau}$，
4. $\mathcal{C}$上的拓扑σ从属于τ当且仅当$S\subseteq\bar{\tau}$，
5. $\mathcal{C}$上的拓扑σ与τ等价当且仅当$\bar{\sigma}=\bar{\tau}$，
6. $\mathcal{C}$上的拓扑与唯一一个$\mathcal{C}$上的饱和拓扑等价.

6.2 层和拓扑斯

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$，函子

$$F: C^{\circ}\to\mathbf{Set}$$

被称为$\mathcal{C}$上的一个预层(presheaf)，$\mathcal{C}$上所有预层组成的范畴记为$\hat{\mathcal{C}}$.若$\mathcal{C}$还是一个位形，

1. 若对$\mathcal{C}$中的任意对象U和U的开覆盖$\{U_i\to U\}_{i\in I}$，$F(U)\to\prod_{i\in I}F(U_i)$都是单射，则称$F$是分离的(separated)，

2. 若对$\mathcal{C}$中的任意对象U和U的开覆盖$\{U_i\to U\}_{i\in I}$，$F(U)$恰好是

$$\prod_{i\in I}F(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j\in I}F(U_i\times_U U_j)$$

   的等值子，则称F是$\mathcal{C}$上的一个层(sheaf).

如上的定义一个预层是一个函子，自然地定义预层之间的态射是函子之间的自然变换，分离预层和层之间的态射是相应预层之间的态射.记$\mathcal{C}$上全体分离预层的范畴为$\mathbf{Fun}^{\mathrm{sep}}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$，$\mathcal{C}$上全体层的范畴为$\mathbf{Sh}(\mathcal{C})$.

例 9.

引理 6.1. *若$\mathscr{F}:\mathbf{Sch}^\circ\to\mathbf{Set}$是Zariski层，那么它是fpqc层当且仅当对任意仿射满忠实映射$f:V\to U$，*

$$F(U)\to F(V)\rightrightarrows F(V\times_U V)$$

是等值子.

证明. 必要性根据定义是明显的，对于充分性我们分多步来完成证明.

第一步：归结到只有一个态射的情形. 任意给定开覆盖$\mathcal{U}=\{U_i\to U\}_{i\in I}$，令$V:=\coprod_{i\in I}U_i$，那么根据习题6.4$\{V\to U\}$也是开覆盖.由于$F$是Zariski层，由自然嵌入诱导的$F(V)\to\prod_{i\in I}F(U_i)$是同构，于是在交换图

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[d, equal] & F(V) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] \arrow[d] & F(V\times_U V) \arrow[d] \\
F(U) \arrow[r] & \prod_{i\in I}F(U_i) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] & \prod_{i,j\in I}F(U_i\times_U U_j)
\end{tikzcd}$$

中，每一列都是同构，于是上一行是等值子当且仅当下一行是等值子，这归结到了只有一个态射的第一行的情形.

第二步：证明F是分离的. 任意给定fpqc态射$f:V\to U$，取U的一个仿射开覆盖$U=\bigcup_{i\in I}U_i$和$V_i=f^{-1}(U_i)$，由于f是拟紧的，每个V_i可以由有限多个仿射开集覆盖，记为$V_i=\bigcup_{a\in\Lambda_i}V_{i,a}$，于是嵌入映射也诱导了交换图

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[d] \\
\prod_{i\in I}F(U_i) \arrow[r] & \prod_{i\in I}\prod_{a\in\Lambda_i}F(V_{i,a}),
\end{tikzcd}$$

其中由于F是Zariski层，每一列都是单射；同时，因为Λ_i的有限性，$\coprod_{a\in\Lambda_i}V_{i,a}$也是仿射的，根据假设

$$F(U_i)\to\prod_{a\in\Lambda_i}F(V_{i,a})$$

也是单射，因此交换图中$F(U)\to F(V)$是单射.

第三步：归结到像集是仿射概型的情形. 考虑任意fpqc态射$f:V\to U$，同样地取U的一个仿射开覆盖$U=\bigcup_{i\in I}U_i$和$V_i=f^{-1}(U_i)$，限制映射诱导了交换图

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] \arrow[d] & F(V\times_U V) \arrow[d] \\
\prod_{i\in I}F(U_i) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\iota_2^*"'] \arrow[d, shift left, "\iota_1^*"] & \prod_{i\in I}F(V_i) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] \arrow[d, shift right, "\iota_2^*"'] \arrow[d, shift left, "\iota_1^*"] & \prod_{i\in I}F(V_i\times_{U_i}V_i) \\
\prod_{i,j\in I}F(U_i\cap U_j) \arrow[r] & \prod_{i,j\in I}F(V_i\cap V_j),
\end{tikzcd}$$

由于F是Zariski层，第一列和第二列都是等值子.若命题对于像集是仿射概型的情形都正确，那么

$$F(U_i)\longrightarrow F(V_i)\overset{\mathrm{pr}_1^*}{\underset{\mathrm{pr}_2^*}{\rightrightarrows}}F(V_i\times_{U_i}V_i)$$

是等值子，因此交换图中第二行也是等值子.做简单的追图：假设存在$b\in F(V)$使得$\mathrm{pr}_1^*(b)=\mathrm{pr}_2^*(b)$，记$b_i$是$b$在$V_i$上的限制，我们想要说明

1. $\mathrm{pr}_1^*(b_i)=\mathrm{pr}_2^*(b_i)$对于所有$i\in I$成立，这因为图的交换性，

2. 存在$a_i\in F(U_i)$使得$b_i=F(f|_{U_i})(a_i)$，这是因为第二行是正合的，

3. $\iota_1^*(a_i)=\iota_2^*(a_i)$对于所有$i\in I$成立，这是因为第二列是正合的且图是交换的；于是存在$a\in F(U)$使得a_i是a在U_i上的限制，

4. $F(f)(a)=b$，这是因为单射性与图的交换性，

这样就证明了这一步.

*第四步：归结到由仿射概型之间忠实平坦态射的情形.*考虑任意fpqc态射$f:V\to U$，其中U是仿射概型，那么存在V的一个有限Zariski开覆盖$V=\bigcup_{i=1}^n V_i$使得每个$f_i=f|_{V_i}:V_i\to U$都是忠实平坦的满射.假定仿射概型之间忠实平坦态射的情形成立，对于图

$$F(U)\longrightarrow \prod_{i=1}^n F(V_i)\underset{\mathrm{pr}_2^*}{\overset{\mathrm{pr}_1^*}{\rightrightarrows}}\prod_{i,j=1}^n F(V_i\times_U V_j),$$

考虑$W=\coprod_{i=1}^n V_i$，如前讨论这直接证明了上图是等值子图.再做同样的追图即可. □

定理 6.1. *若X是概型，那么h_X是$\mathbf{Sch}$上的fpqc层.*

证明. 根据命题1.1，当X是仿射概形时已完成证明. □

定理 6.2. *嵌入函子*

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C})\hookrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$$

存在左伴随函子.

证明. 事实上，我们将会证明范畴的嵌入

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C})\hookrightarrow \mathbf{Fun}^{\mathrm{sep}}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$$

和

$$\mathbf{Fun}^{\mathrm{sep}}(\mathcal{C},\mathbf{Set})\hookrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$$

都有左伴随，因此两个左伴随的复合就是我们想要的.

对于嵌入

$$\mathbf{Fun}^{\mathrm{sep}}(\mathcal{C},\mathbf{Set})\hookrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C},\mathbf{Set}),$$

□

定义. 一个等价于位形上的层范畴的范畴成为拓扑斯(topos).

通常，对位形上拓扑斯的研究比位形本身更为重要，这样会带来更大程度上的方便，因为不同的位形可能会给出等价拓扑斯.在SGA4中，这里定义的拓扑被称为预拓扑(pre-topology)，

例 10. *$\mathbf{Sch}$上的层范畴等价于$\mathbf{AffSch}$上的层范畴.*

例 11. *给定概型X和$\mathbf{Sch}_{/X}$上的平展拓扑，考虑$\mathbf{Sch}_{/X}^{aff,\acute{e}t}$是$\mathbf{Sch}_{/X}$中仅包含满足$U$是仿射概型的平展满射$U\to X$的子范畴，那么位形$\mathbf{Sch}_{/X}$与位形$\mathbf{Sch}_{/X}^{aff,\acute{e}t}$给出相同的拓扑斯.*

习题 6.6. 给定范畴$\mathcal{C}$及其满子范畴$\mathcal{D}$，且满足

1. 对任意$\mathcal{C}$中的对象X，存在开覆盖$\{U_i \to U\}_{i\in I}$满足对所有的$i \in I$，U_i是$\mathcal{D}$中的对象，
2. 若$\mathcal{C}$中的开覆盖$\{U_i \to U\}_{i\in I}$满足对所有的U_i和U都是$\mathcal{D}$中的对象，那么对任意$\mathcal{D}$中的态射$V \to U$，$V \times_U U_i$都是$\mathcal{D}$中的对象，

证明可以给出$\mathcal{D}$上的拓扑，满足$\{U_i \to U\}_{i\in I}$是$\mathcal{D}$中的开覆盖当且仅当它是$\mathcal{C}$中的开覆盖，并且证明位形$\mathcal{C},\mathcal{D}$给出相同的拓扑斯.

命题 6.3. *给定拓扑斯$\mathcal{T}$和小范畴J，那么对任意的图$D : J \to \mathcal{T}$，极限$\lim_J D$存在.*

证明. □

定义. 给定位形$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$和对应地拓扑斯$T_1, T_2$，若函子$F : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$满足对任意$\mathcal{C}_2$的对象$X$和它的开覆盖$\{X_i \to X\}_{i\in I}$，$\{F(X_i) \to F(X)\}_{i\in I}$也是$\mathcal{C}_1$中对象$F(X)$的开覆盖，并且$F$与纤维积是交换的，则称$F$是连续的(continuous).

若$F : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$是连续函子，那么存在自然诱导的函子$F_* : T_1 \to T_2$：

命题 6.4.

6.3 筛

7 纤维范畴

7.1 元素范畴和离散纤维

定义. 给定局部小的范畴$\mathcal{C}$和反变函子$F : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$，如下范畴

1. 对象包含了所有的有序对(A, a)，其中A是$\mathcal{C}$中的对象，a是$F(A)$中的元素，
2. $\hom((A, a), (B, b)) := \{f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \mid F(f)(b) = a\}$

被称为F的元素范畴(category of elements)，记为$\int^{\mathcal{C}} F$.

元素范畴事实上给出了一个函子

$$\int^{\mathcal{C}} : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set}) \to \mathbf{CAT},$$

它的验证留着习题中.

习题 7.1. 验证构造元素范畴的函子性.

证明. 给定函子$F, G : \mathcal{C}^\circ \rightrightarrows \mathbf{Set}$和自然变换$\alpha : F \Rightarrow G$，那么构造

$$\begin{aligned}\int^{\mathcal{C}} \eta : \int^{\mathcal{C}} F &\to \int^{\mathcal{C}} G \\ (A, a) &\mapsto (A, \eta_A(a)) \\ f &\mapsto f,\end{aligned}$$

注意到$G(f)(\eta_B(a)) = \eta_A(F(f)(a))$，这是良定义的. □

注意到给定范畴$\mathcal{C}$和反变函子$F:\mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$，存在自然的函子

$$\begin{aligned} P:\int^{\mathcal{C}} F &\to \mathcal{C} \\ (A,a) &\mapsto A \\ f &\mapsto f, \end{aligned}$$

满足如下条件：

引理 7.1. *对任意对象$(B,b)\in\int^{\mathcal{C}} F$和$g:X\to B=P(B,b)$，存在唯一的$\int^{\mathcal{C}} F$中的态射$f$使得$P(f)=g$.*

证明. 按照定义，唯一性是显然的，只要证明存在性即可.取$X=(A,a)$，其中$a=F(f)(b)$，那么显然这是良定义的. □

我们称满足引理7.1的函子P为离散纤维(discrete fibration).记DiscFib($\mathcal{C}$)是$\mathcal{C}$上离散纤维组成的范畴，即DiscFib($\mathcal{C}$)中的对象是离散纤维$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，对象之间的态射是函子$G:\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2$满足$P_1=P_2G$.显然，DiscFib($\mathcal{C}$)是$\mathbf{CAT}_{/\mathcal{C}}$的满子范畴.一个重要的事情是范畴$\mathcal{C}$上的离散纤维与$\mathcal{C}$的预层一一对应：

定理 7.1. *存在范畴的等价*

$$\mathrm{DiscFib}(\mathcal{C})\simeq\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set}).$$

证明. □

更进一步地，若函子是$\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Cat}$，我们同样有类似于元素范畴的构造，被称为Grothendieck构造：

定义. 给定局部小的范畴$\mathcal{C}$和反变函子$F:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Cat}$，如下范畴

1. 对象包含了所有的有序对(A,a)，其中A是$\mathcal{C}$中的对象，a是$F(A)$中的对象，
2. $\hom((A,a),(B,b)):=\{(f,g)\mid f\in\hom_{\mathcal{C}}(A,B),g\in\hom_{F(A)}(F(f)(b),a)\}$，
3. 复合满足$(h,k)\circ(f,g)=(h\circ f,g\circ F(f)(k))$

被称为F的Grothendieck构造(Grothendieck construction)，也记为$\int^{\mathcal{C}} F$.

注意到此时同样存在自然的函子

$$\begin{aligned} P:\int^{\mathcal{C}} F &\to \mathcal{C} \\ (A,a) &\mapsto A \\ f &\mapsto f, \end{aligned}$$

但该函子类似引理7.1的描述并不简单，为此我们需要新的概念.

7.2 笛卡尔态射

定义. 设$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$是$\mathcal{C}$上的范畴，给定$\mathcal{F}$中的态射$f:A\to B$，若对任意$\mathcal{F}$中的对象$C$和态射$h:C\to B$，只要有$\mathcal{C}$中的交换图

$$\begin{tikzcd} P(C) \arrow[d, "\tilde{g}"'] \arrow[dr, "P(h)"] & \\ P(A) \arrow[r, "P(f)"] & P(B), \end{tikzcd}$$

都存在唯一$\mathcal{F}$中的态射$g : C \to A$使得$P(g) = \tilde{g}$，即

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

则称f是（强）笛卡尔态射((strongly) cartesian morphism).

例 12. 设$\mathcal{C}$是给定的范畴，A是$\mathcal{C}$中的对象，于是我们有A上的斜线范畴$\mathcal{C}/A$和自然的函子$P : \mathcal{C}/A \to \mathcal{C}$.对任意的$f_{/A} : B \to D$，由定义$P(f_{/A}) = f : B \to D$.给定$\mathcal{C}/A$中的对象$u : B \to A$和$w : D \to A$对任意$\mathcal{C}$中的交换图

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[r, "f"] & D, \end{tikzcd}$$

给出了$\mathcal{C}/A$中的对象$C \xrightarrow{w \circ h = w \circ f \circ g} D$，且由于$w \circ f = u$，$g : C \to B$是$\mathcal{C}/A$中的态射，这意味着$\mathcal{C}/A$中的态射都是笛卡尔的.

例 13. 设$\mathcal{C}$是给定的范畴，且其中任意的纤维积存在，定义范畴$\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$如下，它的对象是$\mathcal{C}$中的态射$f : X \to A$，态射$\alpha = (h, k) : f : X \to A \Rightarrow g : Y \to B$是交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[r, "g"] & B. \end{tikzcd}$$

考虑函子$P : \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$，它将$\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$中对象$f : X \to A$映到$A$，将态射$\alpha = (h, k)$映到$k : A \to B$.明显地，$\mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \cong \mathrm{Funct}([1], \mathcal{C})$.

我们要证明α是笛卡尔态射当且仅当X是α的定义交换图的拉回，简称α是一个笛卡尔图.

首先如果我们有$\mathcal{C}$中的交换图

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[dd, "u"'] & & \\ & X \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "f"] & Y \arrow[dd, "g"] \\ C \arrow[dr, "p"'] \arrow[drr, bend left, "q"] & & \\ & A \arrow[r, "k"] & B, \end{tikzcd}$$

使得X是$\mathcal{C}$中的拉回，那么存在（唯一的）$w : Z \dashrightarrow X$使得图交换，因此这是一个笛卡尔态射.另一方面我们考虑若$\alpha = (h, k)$是一个笛卡尔态射，由定义下图

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[dr, dashed, "w"'] \arrow[dd, "u"'] & & \\
& X \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "k"] & Y \arrow[dd, "g"] \\
A \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, equal] & & \\
& A \arrow[r, "k"] & B
\end{tikzcd}
$$

有唯一的$w : Z \dashrightarrow X$使得整幅图交换，因此X是拉回.

引理 7.2. 设$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$是$\mathcal{C}$上的范畴，给定$\mathcal{F}$中的态射$f : A \to B$，那么$f$是笛卡尔态射当且仅当对任意$\mathcal{C}$中的对象$C$，映射

$$
\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{F}}(C, A) &\to \hom_{\mathcal{F}}(C, B) \times_{\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))} \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A)) \\
g &\mapsto (f \circ g, P(g))
\end{aligned}
$$

是一个双射.换句话说，图

$$
\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{F}}(C, A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "P"'] & \hom_{\mathcal{F}}(C, B) \arrow[d, "P"] \\
\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A)) \arrow[r, "P(f)_*"] & \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))
\end{tikzcd}
$$

是拉回图.

证明. 首先注意到，在纤维积$\hom_{\mathcal{F}}(C, B) \times_{\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))} \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A))$中，$\hom_{\mathcal{F}}(C, B) \to \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))$是映射$h \mapsto P(h)$，$\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A)) \to \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))$是映射$\tilde{g} \mapsto P(f) \circ \tilde{g}$.

若f是笛卡尔态射，任意给定$(h, \tilde{g}) \in \hom_{\mathcal{F}}(C, B) \times_{\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))} \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A))$，那么根据纤维积的定义$P(h) = P(f) \circ \tilde{g}$，于是存在唯一的$g : C \to A$使得$P(g) = \tilde{g}$且$f \circ g = h$，即该映射是双射.另一方面，若这个映射是双射，那么给定对象C和$h : C \to B, \tilde{g} : P(C) \to P(A)$满足$P(h) = P(f) \circ \tilde{g}$恰好给出了纤维积$\hom_{\mathcal{F}}(C, B) \times_{\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))} \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A))$中的一个元素$(h, \tilde{g})$，因此存在唯一的$h : C \to A$，这就是笛卡尔态射的定义. □

引理 7.3. 设$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$是$\mathcal{C}$上的范畴，给定$\mathcal{F}$中的态射$f : A \to C$和$g : B \to C$，满足

1. $f : A \to C$是笛卡尔态射，
2. $P(A) \times_{P(C)} P(B)$存在，
3. 存在$\mathcal{F}$中的笛卡尔态射$k : D \to B$满足$P(D) = P(A) \times_{P(C)} P(B)$且$P(k) = \mathrm{pr}_2 : P(A) \times_{P(C)} P(B) \to P(B)$，

那么$A \times_C B$存在且同构于D.

证明. □

习题 7.2. 给定$\mathcal{C}$上的范畴$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，那么

1. 笛卡尔态射的复合是笛卡尔态射，
2. 若态射$A \to B, B \to C$满足复合$A \to B \to C$是笛卡尔态射，那么$A \to B$是笛卡尔态射当且仅当$B \to C$是笛卡尔态射，
3. 若$\mathcal{F}$中的态射$f : A \to B$满足是$P(f) : P(A) \to P(B)$同构，那么它是笛卡尔的当且仅当它本身是同构，
4. 若$Q : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$是函子，$A \to B$是$\mathcal{G}$中的态射，若$A \to B$是$Q : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$的笛卡尔态射，$P(A) \to P(B)$是$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$的笛卡尔态射，那么$A \to B$是$P \circ Q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}$的笛卡尔态射.

定义. 设$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$是$\mathcal{C}$上的范畴，若对任意$\mathcal{F}$中的对象$B$和$\mathcal{C}$中的态射$f : X \to P(B)$，都存在$\mathcal{F}$中的笛卡尔态射$g : A \to B$使得$P(g) = f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, squiggly] & B \arrow[d, squiggly] \\ X \arrow[r, "f=P(g)"] & P(B), \end{tikzcd}$$

则称$\mathcal{F}$是$\mathcal{C}$上的纤维范畴(fibred category).

如上定义可以看作纤维范畴保证在另一种形式下（因为有的对应不是真正的态射）拉回图总是存在的，并且习题7.2说明纤维范畴具有传递性.

引理 7.4. 给定局部小的范畴$\mathcal{C}$和反变函子$F : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Cat}$，那么自然的投影$P : \int^{\mathcal{C}} F \to \mathcal{C}$是纤维范畴.

证明. $\square$

7.3 2范畴结构

当给定一个纤维范畴$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$时，$\mathcal{F}$自然地可以看作一个“函子”$\mathcal{C}^\circ \to \mathrm{CAT}$，它将$\mathcal{C}$中的对象$X$映到$\mathcal{F}(X) := \{A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{F} \mid P(A) = X\}$，且

$$\hom_{\mathcal{F}(X)}(A, B) = \begin{cases} \{f \mid P(f) = \mathrm{id}_{P(A)}\} & P(A) = P(B) \\ \emptyset & P(A) \neq P(B) \end{cases}.$$

我们之后会具体解释这一个对应的函子性.

例 14. 给定范畴$\mathbf{Sch}_S$，$f : X \to Y$是其中取定的态射，那么对于任意的$T \to S$，拉回$X \times_S T$存在，并且范畴论一般的理论说明所有的拉回在同构上是唯一的.但是，在通常的使用中我们需要选取一个对象作为拉回，而不是自然地取唯一的一个拉回，这样的现象是叠理论发展中非平凡的技术性障碍.纤维范畴的引入就是为了解决这一困难.

取范畴$\mathcal{F}$满足对象是$\mathbf{Sch}_S$中的拉回图

$$\begin{tikzcd} X \times_S T \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ T \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

态射是$\mathbf{Sch}_S$中的态射$T_1 \dashrightarrow T_2$和$X \times_S T_1 \dashrightarrow X \times_S T_2$满足交换图

$$\begin{tikzcd} X \times_S T_2 \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & X \times_S T_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ T_2 \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend right] & T_1 \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

并且函子$P:\mathcal{F}\to\mathbf{Sch}_S$将拉回图

$$\begin{tikzcd} X \times_S T \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ T \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

映为$T\to S$，那么对于任意$T\in\mathbf{Sch}_S$，$\mathcal{F}(T)$包含了所有的同构的$X\times_S T$，并且任意$\mathcal{F}(T)$中的两个对象都是唯一同构的，即$\mathcal{F}(T)$中的同构是唯一的（这由拉回的定义保证）.

引理 7.5. 给定$\mathcal{C}$上的纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，那么$\mathcal{F}$中的任意态射$f:A\to B$都可以分解为

$$A\xrightarrow{h}C\xrightarrow{u}B,$$

其中$h:A\to C$是$\mathcal{F}(P(A))$中的态射，且$u:C\to B$是笛卡尔态射.

定义. 给定$\mathcal{C}$上的纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C},Q:\mathcal{G}\to\mathcal{C}$，若函子$H:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$将$\mathcal{F}$中的笛卡尔态射映到$\mathcal{G}$中的笛卡尔态射，且满足交换图（作为函子是相等而不是同构）

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{G} \arrow[dl, "Q"] \\ \mathcal{C}, & \end{tikzcd}$$

则称H是纤维范畴的态射(morphism of fibred categories).我们记$\mathcal{F}$到$\mathcal{G}$的所有态射为

$$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G}).$$

若$H_1,H_2:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$是两个纤维范畴的态射，若自然变换$\eta:H_1\Rightarrow H_2$若满足对任意的$A\in\mathrm{ob}\,\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$中的态射$\eta_A:H_1(A)\to H_2(A)$在$\mathcal{G}(P(A))$中，即$Q(\eta_A)=\mathrm{id}_{P(A)}$，则称$\eta$是保基自然变换(base-preserving natural transformation).这样$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$按照自然变换的复合事实上是一个范畴.

定理 7.2 (2-Yoneda)**.** 映射

$$\begin{aligned}\eta:\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/A,\mathcal{F})&\to\mathcal{F}(A)\\(g:\mathcal{C}/A\to\mathcal{F})&\mapsto g(\mathrm{id}_A)\end{aligned}$$

是纤维范畴的态射，并且诱导了两个范畴的等价.

证明. □

推论 7.2.1. 给定范畴$\mathcal{C}$和对象A,B，那么

$$\begin{aligned}\eta:\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/A,\mathcal{C}/B)&\to\hom_{\mathcal{C}}(A,B)\\(g:\mathcal{C}/A\to\mathcal{C}/B)&\mapsto g(\mathrm{id}_A)\end{aligned}$$

是范畴的等价.

7.4 拟函子

任意给定纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C},Q:\mathcal{G}\to\mathcal{C}$之间的态射$H:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$，那么对于任意$\mathcal{C}$中的对象$A$，如上定义保证了$H$将$\mathcal{F}(A)$映到$\mathcal{G}(A)$，因此可以考虑函子$H_A:\mathcal{F}(A)\to\mathcal{G}(A)$.

如果我们考虑的$\mathcal{C}$上的范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$过于一般，那么对于任意$\mathcal{C}$中的态射$f:A\to B$，存在可能性使得$\mathcal{F}(A)$是空但$\mathcal{F}(B)$不是.这时候，纤维范畴的性质就解决了这样的问题.

给定$\mathcal{C}$上的纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$和$\mathcal{C}$中的态射$f:X\to P(B)$，那么由定义存在$A\in\operatorname{ob}\mathcal{F}$和$h:A\to B$使得$P(h)=f$，通常称$A$是$B$关于$f$的拉回(pull-back)，记为$A=f^*B$

$$\begin{tikzcd}
f^*B \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, squiggly] & B \arrow[d, squiggly] \\
X \arrow[r, "f=P(h)"] & P(B).
\end{tikzcd}$$

若同时存在B_1,B_2和$g:B_1\to B_2\in\mathcal{F}(B)$，那么交换图

$$\begin{tikzcd}
f^*B_1 \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, dashed, "f^*(g)"'] \arrow[dd, squiggly] & & B_1 \arrow[d, "g"] \\
& f^*B_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[dd, squiggly] & B_2 \arrow[dd, squiggly] \\
X \arrow[dr, equal] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& X \arrow[r, "f"] & P(B)
\end{tikzcd}$$

说明存在唯一的$f^*(g):f^*B_1\to f^*B_2$使得整幅图是交换的.

如上所述，纤维范畴事实上可以让我们在某种意义上取拉回!

定义. 给定纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，它的一个cleavage是$\mathcal{F}$中的一族笛卡尔态射$K$，使得对任意$\mathcal{C}$中的态射$\tilde{f}:X\to Y$和满足$P(B)=Y$的$\mathcal{F}$中的对象$B$，存在唯一的$f:A\to B\in K$使得$P(f)=\tilde{f}$.选择公理说明任意纤维范畴的cleavage都是存在的.

定义之前的讨论似乎说明了给定纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，$\mathcal{F}$可以看作一个函子$\mathcal{C}^\circ\to\mathrm{CAT}$，任意的态射$f:X\to Y$给出了函子$f^*:\mathcal{F}(Y)\to\mathcal{F}(X)$.但是，实际上这样给出的对应$f\mapsto f^*$并不具有函子性，一方面是因为，单位态射$\mathrm{id}_X$的拉回$\mathrm{id}_X^*:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)$并不一定是单位函子；虽然可以选择cleavage使得单位态射拉回是单位函子，但这并不“自然”，事实上，根据习题7.2中3，拉回保证了$\epsilon_X:\mathrm{id}_X^*A\to A$是同构，于是这给出了“函子”之间的同构$\epsilon_X:\mathrm{id}_X^*\to\mathrm{id}$.

更重要的问题是，考虑$\mathcal{C}$中的态射$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$，那么对于$\mathcal{F}$中满足$P(C)=W$的对象$C$，$f^*g^*C$和$(g\circ f)^*C$都是$C$沿$g\circ f$的拉回，我们没有任何理由保证$f^*g^*C=(g\circ f)^*C$，只能类似之前讨论的那样得到自然的同构$\eta_{f,g}(C):f^*g^*C\to(g\circ f)^*C$.这样导致之前的构造实质上并没有函子性.但是，这距离真正的函子性并不遥远，核心技术性的内容来自于所有的范畴组成一个2范畴，这样给了我们更多的结构方便讨论.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$，那么$\mathcal{C}^\circ$上的一个拟函子F(pseudo-functor, lax 2-functor)包含以下信息

(i) 对任意$\mathcal{C}$中的对象X，$F(X)$是一个范畴，

(ii) 对任意$\mathcal{C}$中的态射$f:X\to Y$，$f^*:F(Y)\to F(X)$是一个函子，

(iii) 对任意$\mathcal{C}$中的对象X，存在函子之间的自然同构$\epsilon_X : \mathrm{id}_X^* \Rightarrow \mathrm{id}_{F(X)}$，

(iv) 对任意$\mathcal{C}$中的态射$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，存在函子之间的自然同构$\eta_{f,g} : f^*g^* \Rightarrow (g \circ f)^*$，

满足

1. 任给定$\mathcal{C}$中的态射$f : X \to Y$和$F(Y)$中的对象B，
$$\eta_{\mathrm{id}_X,f}(B) = \epsilon_X(f^*B) : \mathrm{id}_X^* f^*B \to f^*B$$
且
$$\eta_{f,\mathrm{id}_Y}(B) = f^*\epsilon_X(B) : f^*B \to \mathrm{id}_Y^* f^*B,$$

2. 任给定$\mathcal{C}$中的态射$W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$和$F(Z)$中的对象$D$，下图交换
$$\begin{array}{ccc} f^*g^*h^*D & \xrightarrow{\eta_{f,g}(h^*D)} & (gf)^*h^*D \\ \downarrow{\scriptstyle f^*\eta_{g,h}(D)} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{gf,h}(D)} \\ f^*(hg)^*D & \xrightarrow{\eta_{f,hg}(D)} & (hgf)^*D. \end{array}$$

命题 7.3. *任意纤维范畴$p : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$及其上的cleavage给出了一个拟函子$\mathcal{F}$.*

证明. □

定义. 给定纤维范畴$p : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$及其上的cleavage K，若它包含所有的单位态射并在复合下封闭，则称K是分裂的.

推论 7.3.1. *$p : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$上cleavage K给出的拟函子是函子当且仅当K是分裂的.*

例 15.

事实上，反过来的命题也是正确的，即给定一个范畴$\mathcal{C}$上的拟函子都一定能够构造与之对应的纤维范畴和cleavage.我们先从简单的情形——$F : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{CAT}$是一个函子开始，具体说来对任意$\mathcal{C}$中的对象$X$，都有一个范畴$F(X)$对应，对$\mathcal{C}$中的任意态射$f : X \to Y$，都有函子$f^* = F(f)$对应，满足$(\mathrm{id}_X)^* = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$，且对任意可复合的态射$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

此时，我们尝试构造相应的纤维范畴$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，使得存在典范的范畴等价$\mathcal{F}(X) \simeq F(X)$对任意$\mathcal{C}$中的对象$X$都成立：

(i) $\mathcal{F}$中的对象定义为有序对(X, A)，其中X是$\mathcal{C}$中的对象，A是$F(X)$中的对象，

(ii) 给定对象(X, A)和(Y, B)，态射是有序对(f, g)，其中$f : X \to Y$是$\mathcal{C}$中的态射，$g : A \to f^*B$是$F(X)$中的态射，

(iii) 给定态射$(f, g) : (X, A) \to (Y, B)$和$(h, k) : (Y, B) \to (Z, C)$，它们的复合定义为
$$(h, k) \circ (f, g) = (h \circ f, f^*(k) \circ g) : (X, A) \to (Z, C),$$

此时，存在自然的函子$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，将对象$(X, A)$映到$X$，将态射$(f, g)$映到$f$.此时，这个函子使得$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$是纤维范畴.

于是我们实际上证明了

定理 7.4.

7.5 群胚纤维范畴

定义. $\mathcal{C}$上的纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$若满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$，$\mathcal{F}(A)$都是群胚，即$\mathcal{F}$中被映到id的态射都是可逆的，则称$\mathcal{F}$是群胚纤维范畴(category fibred over groupoid).

例 16. *作为一个更特别的例子，考虑*$\mathbf{Bun}$*是所有拓扑（连续）向量丛组成的范畴，其中的态射是丛态射.由于拓扑向量丛的拉回依旧是拓扑向量丛，因此例13中的证明也说明了*$\mathbf{Bun}\to\mathbf{Top}$*是一个纤维范畴.一般而言这不是一个群胚纤维范畴，但给定拓扑群*G*，定义*G*的分类叠(classfying stack)如下，*BG*是*$\mathbf{Top}$*，对象是*G*主丛*$P\to X$*，态射是丛态射，可以证明这个特殊情况是群胚纤维范畴.*

命题 7.5. *设*$\mathcal{C}$*上有纤维范畴*$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C},Q:\mathcal{G}\to\mathcal{C}$*，若*$\mathcal{F}$*是集合纤维范畴，则范畴*$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$*是一个集合，若*$\mathcal{F}$*是群胚纤维范畴，则范畴*$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$*是一个群胚.*

证明. □

命题 7.6. *给定*$\mathcal{C}$*上的范畴*$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$*，那么*$\mathcal{F}$*是群胚纤维范畴当且仅当如下两条成立：*

1. $\mathcal{F}$*中的所有态射都是笛卡尔态射，*

2. *对任意*$\mathcal{F}$*中的对象*B*和*$\mathcal{C}$*中的态射*$f:X\to P(B)$*，都存在*$\mathcal{F}$*中的态射*$\tilde{f}:A\to B$*满足*$P(\tilde{f})=f$*.*

证明. 假定如上两条成立，那么我们要证明$\mathcal{F}$是群胚纤维范畴；$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$明显是纤维范畴，因此只要证明对任意$f:A\to B\in\mathcal{F}$，若$P(f)=\mathrm{id}_X$，则$f$是$\mathcal{F}(X)$中的同构即可.由条件1，$f$是笛卡尔映射，因此根据定义存在唯一的$g:B\to A$满足$f\circ g=\mathrm{id}_B$；同理$g$的左逆存在，因而$f$是同构.

反过来假设$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$是群胚纤维范畴，只要证明条件1就立即有条件2. □

定义. 给定$\mathcal{C}$上的纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，对于$\mathcal{C}$中的对象$X$和$\mathcal{F}(X)$中的对象$A,B$，存在如下的预层：

$$\mathrm{Iso}(A,B):\mathcal{C}^\circ/X\to\mathbf{Set},$$

对于$Y\xrightarrow{f}X$，由给定的cleavage选定拉回f^*A和f^*B（它们都是$\mathcal{F}(Y)$中的对象），那么

$$\mathrm{Iso}(A,B)(Y\xrightarrow{f}X):=\hom_{\mathcal{F}(Y)}(f^*A,f^*B).$$

对于$\mathcal{C}/X$中的态射$h:Y\to Z$，函子得到的限制映射是

$$\hom_{\mathcal{F}(Y)}(f^*A,f^*B)\xrightarrow{h^*}\hom_{\mathcal{F}(Z)}(g^*f^*A,g^*f^*B)\cong\hom_{\mathcal{F}(Z)}((fg)^*A,(fg)^*B).$$

习题 7.3. 验证上述定义中的h^*是良定义的.

7.6 拉回和推出

习题 7.4. 若$\mathcal{G},\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$都是群胚，且存在函子$F_i:\mathcal{H}_i\to\mathcal{G}$，那么$\mathcal{H}_1\times_{\mathcal{G}}\mathcal{H}_2$.

定义. 设$\mathcal{D}$上的范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{D}$是纤维范畴，$G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是函子，则对象是配对$(X\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C},A\in\mathcal{F}(f(X)))$，态射$f:(X,A)\to(Y,B)$是满足$P(f)\in\hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(f(X)),\mathcal{F}(f(Y)))$的$\mathcal{F}$中的态射$f:X\to Y$的范畴$G^{-1}(\mathcal{F})$被称为$\mathcal{F}$关于$G$的拉回.

$$\begin{tikzcd} G^{-1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "G^{-1}(P)"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "P"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "G"] & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

在上面的定义中，我们没有把纤维范畴的拉回写为“对称”的，这是因为，虽然我们可以证明$G^{-1}(\mathcal{F})$就是范畴的纤维积$\mathcal{F}\times_{\mathcal{D}}\mathcal{C}$，但是下面的事情说明定义对于纤维性并不对称：

引理 7.6. *$G^{-1}(\mathcal{F})$是$\mathcal{C}$上的纤维范畴.*

定义.

例 17.

8 下降法

在代数几何当中，我们知道，当局部存在拟凝聚层时，只要它们满足被称为“条件”的相容性，就存在同构意义下唯一的拟凝聚层使得它在局部的限制恰好为给定的拟凝聚层.当前一段中的“局部”所指是“Zariski局部”的时候，这个命题并不难证明，但我们同样可以证明命题在“平坦局部”的情形下依旧成立，而这个命题的证明就会困难很多.对这个局部性的讨论就需要Grothendieck拓扑，但只要接受对一个层$\mathscr{F}$复合态射的拉回有自然的同构$f^*g^*\mathscr{F}\cong(gf)^*\mathscr{F}$，它依旧是一个自然并且简单的命题.

但问题是，之前得到的只是一个同构而不是一个相等，为保证证明的严格性，我们必须建立一套理论，使得可以最终得到想要的由局部信息“粘合”的对象，这样的理论就是下降法(descent theory)，而下降法成立的范畴就被称为叠(stack).

引理 8.1. *设$\mathcal{C}$是存在纤维积的范畴，$\{*\}$是终对象，那么对任意$A\in\operatorname{ob}\mathcal{C}$，$f:A\to\{*\}$给出了范畴的嵌入*

$$f^*:\mathcal{C}_{/A}\to\mathcal{C}$$

使得f^*是一个函子.

证明. □

引理 8.2. *设$\mathcal{C}$是存在纤维积的范畴，$A\in\operatorname{ob}\mathcal{C}$且$\mathcal{C}_{/A}$是对象$A$上的范畴，那么对于任意$B\in\operatorname{ob}\mathcal{C}$，函子$h_B:=\hom_{\mathcal{C}}(-,B)$在$\mathcal{C}_{/A}$上的限制是$h_{B\times A}:=\hom_{\mathcal{C}_{/A}}(-,B\times A)$.*

证明. □

8.1 几何对象的下降

8.2 纤维范畴的下降

考虑范畴$\mathbf{Sch}_S$，X是其中的对象，若函子$F:\mathbf{Sch}_S^\circ\to\mathbf{Set}$满足它在$\mathbf{Sch}_X$上的限制是可表的，

定义. 给定一个位形$\mathcal{C}$和上面的纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，且我们选定一个cleavage.设$\mathcal{U}:=\{\iota_i:U_i\to U\}_{i\in I}$是$\mathcal{C}$中$U$的一个覆盖.$\mathcal{U}$上的一个下降信息对象(an object with descent data on $\mathcal{U}$)是一族对象$(A_i,\varphi_{i,j})$，其中A_i是$\mathcal{F}(U_i)$中的对象，$\varphi_{i,j}$是同构

$$\varphi_{i,j}:\operatorname{pr}_1^*A_i\cong\operatorname{pr}_2^*A_j,$$

且对于任意的i,j,k满足如下的上闭链条件(cocycle condition)：

$$\mathrm{pr}_{1,3}^*\varphi_{i,k}=\mathrm{pr}_{2,3}^*\varphi_{j,k}\circ\mathrm{pr}_{1,2}^*\varphi_{i,j}:\mathrm{pr}_1^*A_i\to\mathrm{pr}_2^*A_j\to\mathrm{pr}_3^*A_k.$$

其中，$\varphi_{i,j}$被称为转移同构(transition isomorphism).

下降对象的态射

$$\eta:(A_i,\varphi_{i,j})\to(B_i,\psi_{i,j})$$

是一族态射$\eta_i:A_i\to B_i$满足交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_1^*A_i \arrow[r, "\varphi_{i,j}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1^*\eta_i"'] & \mathrm{pr}_2^*A_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_2^*\eta_j"] \\
\mathrm{pr}_1^*B_i \arrow[r, "\psi_{i,j}"] & \mathrm{pr}_2^*B_j.
\end{tikzcd}$$

我们记所有下降对象组成的范畴为$\mathcal{F}(\mathcal{U})=\mathcal{F}(\{\iota_i:U_i\to U\}_{i\in I})$.

例 18. *在例16中，我们说明了$\mathbf{Bun}\to\mathbf{Top}$是一个纤维范畴.考虑一个给定的拓扑空间$B$和开覆盖$\mathcal{U}=\{\iota_i:U_i\to B\}_{i\in I}$，使得向量丛$p:E\to B$满足$\varphi_i:p^{-1}(U_i)\to U_i\times F$是拓扑空间的同胚，其中$F$是纤维；于是如上的局部性说明$p^{-1}(U_i)\in\mathrm{ob}\,\mathbf{Bun}(U_i)$.此外，向量丛的定义还给出了同构*

$$(U_i\cap U_j)\times F\xrightarrow{\varphi_j^{-1}|_{(U_i\cap U_j)\times F}}p^{-1}(U_i\cap U_j)\xrightarrow{\varphi_i|_{U_i\cap U_j}}(U_i\cap U_j)\times F,$$

记它为$\varphi_{j,i}$.注意到$U_i\cap U_j=U_i\times_U U_j$，第一个$(U_i\cap U_j)\times F$是作为$U_j\times F$的子空间，于是

$$(U_i\cap U_j)\times F=\mathrm{pr}_2^*A_j,$$

并且由于每个$(U_i\cap U_j\cap U_k)\times F$是同一个$E$的子空间的同构像，故上闭链条件自动满足.于是，这说明了给定拓扑向量丛$p:E\to B$也就给定了$\mathcal{U}$上的下降信息.反过来，拓扑中证明了粘合引理，于是给定了下降信息对象也就给定了（同构唯一的）拓扑向量丛.

给定一个拉回的选择，那么对于任意的对象$A\in\mathcal{F}(U)$，都存在一个$\mathcal{U}:=\{\iota_i:U_i\to U\}_{i\in I}$上的下降对象$(A_i,\varphi_{i,j})$，其中$A_i$根据拉回的选择而给出，而同构恰好由笛卡尔映射的性质??? 给出，因为$\mathrm{pr}_1^*A_i,\mathrm{pr}_2^*A_j$都是$\mathcal{F}(U_i\times_U U_j)$中的对象.同样地，对任意的$\mathcal{C}$中的态射$f:U\to V$，我们可以得到$\iota_i^*f:A_i\to B_i$，于是这是一个函子$\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

习题 8.1. 假定给定两个拉回的选择，分别得到下降对象的范畴$\mathcal{F}(\mathcal{U})$和$\mathcal{F}\overline{(\mathcal{U})}$.求证两个范畴同构，且这个同构与之前提到的函子$\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(\mathcal{U})$交换.

定义. $\mathcal{F}(\mathcal{U})$中的对象$(A_i,\varphi_{i,j})$若同构于$\mathcal{F}(U)$的象，则称它是有效的(effective).

事实上，我们还有不需要给定拉回选择定义下降资料的方法：

定义. 给定一个位形$\mathcal{C}$和上面的纤维范畴$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，$\mathcal{U}:=\{\iota_i:U_i\to U\}_{i\in I}$是$\mathcal{C}$中$U$的一个覆盖.$\mathcal{U}$上的一个下降信息对象是一族对象$(\{A_i\}_{i\in I},\{A_{i,j}\}_{i,j\in I},\{A_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$，其中$A_i\in\mathcal{F}(U_i),A_{i,j}\in\mathcal{F}(U_{i,j}),A_{i,j,k}\in\mathcal{F}(U_{i,j,k})$，且对任意三个指标都有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
& A_{i,j,k} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & A_{j,k} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
A_{i,j} \arrow[rr] \arrow[dd] & & A_j & \\
& A_{i,k} \arrow[rr] \arrow[dl] & & A_k, \\
A_i & & &
\end{tikzcd}$$

其中每个箭头都是笛卡尔态射，且函子$P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$作用在图上得到$\mathcal{C}$中的一个覆盖图.

两个对象$(\{A_i\}_{i\in I},\{A_{i,j}\}_{i,j\in I},\{A_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$和$(\{B_i\}_{i\in I},\{B_{i,j}\}_{i,j\in I},\{B_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$之间的态射是一族$\mathcal{F}$中的态射

$$\eta:(\{A_i\},\{A_{i,j}\},\{A_{i,j,k}\})\to(\{B_i\},\{B_{i,j}\},\{B_{i,j,k}\})$$
$$\eta_i:A_i\to B_i,$$

满足

$$\mathrm{pr}_1^*\eta_i=\mathrm{pr}_2^*\eta_j:A_{i,j}\to B_{i,j}.$$

我们记这个范畴为$\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})$.

习题 8.2. 验证$\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})$中态射的定义同于给定态射$\eta_i:A_i\to B_i,\eta_{i,j}:A_{i,j}\to B_{i,j},\eta_{i,j,k}:A_{i,j,k}\to B_{i,j,k}$，且它们满足相应的相容性关系.

一旦给定一个拉回的选择，就存在一个函子$\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})\to\mathcal{F}(\mathcal{U})$，将对象$(\{A_i\}_{i\in I},\{A_{i,j}\}_{i,j\in I},\{A_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$映到$(A_i,\varphi_{i,j})$，其中

$$\varphi_{i,j}:\mathrm{pr}_1^*A_i\cong A_{i,j}\to\mathrm{pr}_2^*A_j\cong A_{i,j}$$

由拉回给出.同样给定拉回的选择后，也有函子$\mathcal{F}(\mathcal{U})\to\mathcal{F}(\mathcal{U})_{\mathrm{desc}}$.

习题 8.3. 验证范畴的同构

$$\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})\simeq\mathcal{F}(\mathcal{U}).$$

注意到定义中并不存在交换图右下角的对象，这个对象恰好对应覆盖图当中的终对象.但是如果我们定义范畴$\mathcal{F}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{U})$，其中的对象是$(A,\{A_i\}_{i\in I},\{A_{i,j}\}_{i,j\in I},\{A_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$满足$A\in\mathcal{F}(U),A_i\in\mathcal{F}(U_i),A_{i,j}\in\mathcal{F}(U_{i,j}),A_{i,j,k}\in\mathcal{F}(U_{i,j,k})$，且如下交换图

$$\begin{tikzcd}
& A_{i,j,k} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & A_{j,k} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
A_{i,j} \arrow[rr] \arrow[dd] & & A_j \arrow[dd] & \\
& A_{i,k} \arrow[rr] \arrow[dl] & & A_k \arrow[dl] \\
A_i \arrow[rr] & & A &
\end{tikzcd}$$

成立，其中所有的箭头都是笛卡尔态射.类似于范畴$\mathcal{F}_{\text{desc}}(\mathcal{U})$，对象之间的态射定义为相应项之间的满足相容性条件的态射.值得注意的是，$\mathcal{F}_{\text{comp}}(\mathcal{U})$与范畴$\mathcal{F}(U)$同构.

习题 8.4. 验证范畴的同构
$$\mathcal{F}_{\text{comp}}(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{F}(U).$$

8.3 模的平坦下降

给定交换环R和R代数$\alpha : R \to A$，给定一个R模那么自然地有A模$A \otimes_R M$，记
$$\alpha_M : M \to A \otimes_R M$$
$$m \mapsto 1 \otimes m,$$
此时，存在自然的A模同构$\psi_M : A \otimes_R M \to M \otimes_R A, a \otimes m \mapsto m \otimes a$.反过来若给定一个$A$模$N$，那么在什么情况下存在$R$模$M$使得$N \cong A \otimes_R M$？

我们首先从如下问题开始，给定一个A模N，那么有两种方式使得N成为一个$A \otimes_R A$模，即要么是$N \otimes_R A$要么是$A \otimes_R N$，它们的数乘结构都定义为$(a_1 \otimes a_2)(x_1 \otimes x_2) = (a_1x_1) \otimes (a_2x_2)$；同时我们有自然的$A \otimes_R A$模的同构
$$\psi_N : A \otimes_R N \to N \otimes_R A$$
$$a \otimes n \mapsto n \otimes a.$$
任意给定一个同构$\psi : A \otimes_R N \to N \otimes_R A$，使$N$成为$A \otimes_R A \otimes_R A$模有对应的$A \otimes_R A \otimes_R A$模同构
$$\psi_1 : A \otimes_R A \otimes_R N \to A \otimes_R N \otimes_R A$$
$$\psi_2 : A \otimes_R A \otimes_R N \to N \otimes_R A \otimes_R A$$
$$\psi_3 : A \otimes_R N \otimes_R A \to N \otimes_R A \otimes_R A,$$
分别取第一、第二和第三项为恒同映射，具体而言，若$\psi(a \otimes n) = \sum_{i=1}^K y_i \otimes x_i$，那么$\psi_1 = \mathrm{id}_A \otimes \psi : b \otimes a \otimes n \mapsto \sum_{i=1}^K a \otimes y_i \otimes x_i, \psi_3 = \psi \otimes \mathrm{id}_A : a \otimes n \otimes b \mapsto \sum_{i=1}^K y_i \otimes x_i \otimes b$，并且$\psi_2 = (\mathrm{id}_A \otimes \psi_N) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \psi) \circ (\psi_A \otimes \mathrm{id}_N) : a \otimes b \otimes n \mapsto b \otimes a \otimes n \mapsto b \otimes \sum_{i=1}^K y_i \otimes x_i \mapsto \sum_{i=1}^K y_i \otimes b \otimes x_i$（这里$\psi_N$和$\psi$不是同一个映射）.一般情况下这三个映射没有关系，但如果$N = A \otimes_R M$，定义
$$\psi = \psi_{A,M} : A \otimes_R (A \otimes_R M) \to (A \otimes_R M) \otimes_R A$$
$$a \otimes b \otimes m \mapsto a \otimes m \otimes b,$$
这样有
$$\psi_2 = \psi_3 \circ \psi_1.$$

仿照如上的讨论，定义范畴$\alpha - \mathbf{Mod}$，对象是有序对(N, ψ)，其中N是A模，ψ是同构
$$\psi : A \otimes_R N \to N \otimes_R A,$$
满足如下定义的$\psi_1 = \mathrm{id}_A \otimes \psi, \psi_2 = (\mathrm{id}_A \otimes \psi_N) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \psi) \circ (\psi_A \otimes \mathrm{id}_N), \psi_3 = \psi \otimes \mathrm{id}_A$有关系
$$\psi_2 = \psi_3 \circ \psi_1.$$

注意到这里并不要求ψ是映射$a\otimes n\mapsto n\otimes a$.给定两个对象$(N,\psi),(P,\xi)$，那么一个态射是$A$模同态$\varphi:N\to P$满足交换图

$$\begin{array}{ccc} A\otimes_R N & \xrightarrow{\psi} & N\otimes_R A \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A\otimes\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\otimes\mathrm{id}_A} \\ A\otimes_R P & \xrightarrow{\xi} & P\otimes_R A. \end{array}$$

注意到，

$$F:R-\mathbf{Mod}\to\alpha-\mathbf{Mod}$$
$$M\mapsto(A\otimes_R M,\psi_M:A\otimes_R(A\otimes_R M)\to(A\otimes_R M)\otimes_R A)$$

给出了一个函子，其中$\psi_M=\mathrm{id}_A\otimes\psi:a\otimes b\otimes m\mapsto a\otimes m\otimes b$.对任意的$R$模同态$\varphi:M_1\to M_2$，$F(\varphi)$定义为$\mathrm{id}_A\otimes\psi$.

习题 8.5. 验证如上给出的$\psi_{A,M}$是$A\otimes_R A$模同态，并且$(A\otimes_R M,\psi_{A,M})$是$\alpha-\mathbf{Mod}$中的对象.

如上正合性的证明的思路实际上是先提升到A模范畴中，借用已经存在的截面映射证明正合性，在直接下降到R模范畴中.

现在我们可以讨论最重要的结果了：

定理 8.1. *若$\alpha:R\to A$是忠实平坦的，那么函子*

$$F:R-\mathbf{Mod}\to\alpha-\mathbf{Mod}$$

给出了范畴的等价.

证明. 定义函子$G:\alpha-\mathbf{Mod}\to R-\mathbf{Mod}$，将$\alpha-\mathbf{Mod}$中的对象$(N,\psi)$映到$N$的子模

$$G(N):=\{n\in N\mid n\otimes 1=\psi(1\otimes n)\}=\{n\in N\mid \psi^{-1}(n\otimes 1)=1\otimes n\},$$

态射$\varphi:(N,\psi)\to(P,\xi)$映到$\varphi|_{G(N)}$.接下来分别需要验证$G\circ F$和$F\circ G$同构于相应范畴上的恒同函子.

注意到

$$(\iota_1-\iota_2)\otimes\mathrm{id}_M(a\otimes m)=a\otimes 1\otimes m-1\otimes a\otimes m=\psi_{A,M}^{-1}(a\otimes m\otimes 1)-1\otimes a\otimes m,$$

因此

$$G(F(M))=G(A\otimes_R M)=\{a\otimes m\mid \psi_{A,M}^{-1}(a\otimes m\otimes 1)-1\otimes a\otimes m=0\}$$

恰好是$\mathrm{Ker}\ (\iota_1-\iota_2)\otimes\mathrm{id}_M$，这样引理1.1说明同构

$$\alpha_M:M\to\mathrm{Im}\ \alpha_M=\mathrm{Ker}\ (\iota_1-\iota_2)\otimes\mathrm{id}_M$$

给出了自然同构$\alpha:\mathrm{id}_{R-\mathbf{Mod}}\Rightarrow G\circ F$.

另一方面，任给定α模(N,ψ)，考虑$M:=G(N,\psi)=\{n\in N\mid n\otimes 1=\psi(1\otimes n)\}$，定义

$$\theta_M:A\otimes_R M\to N$$
$$a\otimes m\mapsto am,$$

这样我们需要验证θ_M是$\alpha-\mathbf{Mod}$的同构，这样$\theta:\mathrm{id}\Rightarrow F\circ G$就是所需要的自然同构（自然性从定义中是明显的）.

首先来验证θ_M是$\alpha-\mathbf{Mod}$中的态射，即有交换图

$$\begin{array}{ccc} A\otimes_R A\otimes_R M & \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\psi_M} & A\otimes_R M\otimes_R A \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A\otimes\theta_M} & & \big\downarrow{\scriptstyle \theta_M\otimes\mathrm{id}_A} \\ A\otimes_R N & \xrightarrow{\psi_N} & N\otimes_R A. \end{array}$$

直接按照定义验证有

$$\begin{aligned} \psi_N(\mathrm{id}_A\otimes\theta_M)(a\otimes b\otimes m) &= \psi_N(a\otimes bm) \\ &= \psi_N((a\otimes b)(1\otimes m)) \\ &= (a\otimes b)\psi_N(1\otimes m) \\ &= (a\otimes b)(m\otimes 1) \\ &= am\otimes b \\ &= (\theta_M\otimes\mathrm{id}_A)(a\otimes m\otimes b) \\ &= (\theta_M\otimes\mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_A\otimes\psi_M)(a\otimes b\otimes m), \end{aligned}$$

于是良定义得证.为验证θ_M是同构，考虑$\alpha,\beta:N\to A\otimes_R N$，分别定义为$\alpha(n)=1\otimes n,\beta(n)=\psi^{-1}(n\otimes 1)$，于是由定义立即可得$M=\mathrm{Ker}\ \alpha-\beta$.考虑图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M\otimes_R A & \xrightarrow{i\otimes\mathrm{id}_A} & N\otimes_R A & \xrightarrow{(\alpha-\beta)\otimes\mathrm{id}_A} & A\otimes_R N\otimes_R A \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \theta_M\circ\psi_M^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi_1^{-1}} \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha_N} & A\otimes_R N & \xrightarrow{(\iota_1-\iota_2)\otimes\mathrm{id}_N} & A\otimes_R A\otimes_R N \end{array}$$

其中$i:M\hookrightarrow N$是自然的嵌入，引理1.1第二行是正合的，由A的平坦性第一行是正合的，计算

$$\begin{aligned} \alpha_N\circ\theta_M\circ\psi_M^{-1}(m\otimes a) &= 1\otimes am \\ &= (1\otimes a)(1\otimes m) \\ &= (1\otimes a)\psi^{-1}(m\otimes 1) \\ &= \psi^{-1}((1\otimes a)(m\otimes 1)) = \psi^{-1}(m\otimes a) \end{aligned}$$

说明左边方块是交换的，计算

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1}\circ(\beta\otimes\mathrm{id}_A)(n\otimes a) &= \psi_1^{-1}(\psi^{-1}(n\otimes 1)\otimes a) \\ &= \psi_1^{-1}\circ\psi_3^{-1}(1\otimes n\otimes a) \\ &= \psi_2^{-1}(1\otimes n\otimes a) \\ &= (\iota_1\otimes\mathrm{id}_N)\circ\psi^{-1}(n\otimes a), \end{aligned}$$

且明显地$\psi_1^{-1}\circ(\alpha\otimes\mathrm{id}_A)=(\iota_2\otimes\mathrm{id}_N)\circ\psi^{-1}$，这说明右边方块是交换的，根据5引理$\theta_M\circ\psi_M^{-1}$是同构. □

9 叠

定义. 设F,G是函子$\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Set}$，自然态射$\eta:F\Rightarrow G$若满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$和自然态射$\epsilon:h_A\Rightarrow G$，纤维积函子

$$h_A\times_G F:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Set}$$

是可表的，则称F是相对于G可表的(representable relative to G).

定义. 给定函子$F, G : \mathbf{Aff}^{\circ}_{/S} \to \mathbf{Set}$，自然态射$\eta : F \Rightarrow G$若满足

1. η是相对可表的，

2. 对任意$\mathbf{Aff}^{\circ}_{/S}$中的对象$A$和自然态射$\epsilon : h_A \Rightarrow G$，$h_A \times_G F \Rightarrow h_A$是一个开（相对的闭）嵌入，

则称η是仿射开（相对的，闭）嵌入(affine open (resp. closed) embedding).

定义. 给定一个位形$\mathcal{C}$和上面的纤维范畴$P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，若对于任意覆盖$\mathcal{U} := \{\iota_i : U_i \to U\}_{i \in I}$，函子$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$是范畴的等价，则称$\mathcal{F}$是$\mathcal{C}$上的叠(stack).若函子$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$是满忠实的，则称$\mathcal{F}$是$\mathcal{C}$上的预叠(pre-stack).

我们具体来解释一下如上的定义.

例 19. *在例16中，我们说明了$\mathbf{Bun} \to \mathbf{Top}$是一个纤维范畴，事实上这还是一个叠.*

例 20. *设$\mathcal{C}$是一个位形，考虑*

例 21. *我们来验证若X是S上的概型，则自然的忘却函子$P : \mathbf{Sch}_{/X} \to \mathbf{Sch}_{/S}$是叠.*

10 代数空间

命题 10.1. *满射，正规，分裂，拟紧是稳定性质*

定义. 给定概型S和$\mathbf{Sch}_{/S}$上平展拓扑层的态射$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$，

1. 若对任意S概型T和态射$T \to \mathcal{G}$，纤维积$\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} T$都是一个概型，则称$f$由概型代表(representable by schemes)，

2. 若P是一个概型态射的稳定性质，且f由概型代表，若对任意S概型T和态射$T \to \mathcal{G}$，$\mathrm{pr}_2 : \mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} T$也具有性质$P$，则称$f$具有性质$P$(has property P).

$\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} T$事实上是$\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} h_T$，注意层范畴是完备的，因此该纤维积一定存在.

定义. 给定概型S，函子$\mathfrak{X} : \mathbf{Sch}^{\circ}_{/S} \to \mathbf{Set}$若满足

1. $\mathfrak{X}$是$\mathbf{Sch}_{/S}$平展拓扑上的层，

2. $\Delta : X \to X \times_S X$可由概型表示，

3. 存在平展满射的S态射$X \to \mathfrak{X}$，

则称$\mathfrak{X}$是S上的代数空间(algebraic space).

10.1 平展等价关系

定义. 给定概型S，S概型X上的平展等价关系(étale equivalence relation)R是S概型的单态射

$$R \hookrightarrow X \times_S X,$$

满足

1. 对任意S概型T，T点
$$R(T) \subseteq X(T) \times X(T)$$
是集合上的等价关系，

2. 由投影$X \times_S X \to X$诱导态射$s, t : R \to X$都是平展的.

给定S概型X上的平展等价关系R，那么有预层
$$\begin{aligned} \mathbf{Sch}_{/S}^{\circ} &\to \mathbf{Set} \\ T &\mapsto X(T)/R(T), \end{aligned}$$
记它对应的在$\mathbf{Sch}_{/S}$上平展拓扑的层为X/R.

命题 10.2. *1. X/R是S上的代数空间，*

2. 任意给定S上的代数空间$\mathfrak{X}$和平展覆盖$U \to \mathfrak{X}$，那么
$$R := U \times_{\mathfrak{X}} U$$
是一个概型，且单射
$$R \hookrightarrow U \times_S U$$
是U上的平展等价关系，自然存在的态射$U/R \to \mathfrak{X}$是同构.

10.2 例子

例 22. *给定一个（离散）群G，假定G在如下意义下在$X \in \mathbf{Sch}_{/S}$有一个作用：对每个S概型T，存在集合上的作用*
$$\sigma_T : G \times X(T) \to X(T),$$
并且这个作用关于T是自然的.如果进一步地态射
$$G \times X \to X \times X$$
是单态射，那么称这个作用是自由的(free).

给定一个自由的离散群作用$G \circlearrowright X$，那么单态射
$$G \times X \to X \times X$$
给出了一个平展等价关系，因此根据命题10.2，这给出了一个代数空间.

11 代数叠

12 BG

定义. 设$\mathcal{C}$位形，且$\mathscr{G}$是$\mathcal{C}$上的群层.若$\mathcal{C}$上的层$\mathscr{P}$有$\mathscr{G}$（逐点定义且满足自然性的）作用[1]，满足

[1]具体说来，对任意$\mathcal{C}$中的对象A都存在集合的作用$\sigma_A : \mathscr{G}(A) \times \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$且这一族作用$\sigma$关于$A$是自然的.

1. 对任意$\mathcal{C}$中的对象U，存在开覆盖$\mathcal{U} := \{U_i \to U\}_{i\in I}$满足$\mathscr{P}(U_i) \neq \emptyset$对所有$i \in I$成立，
2. 态射

$$\mathscr{G} \times \mathscr{P} \to \mathscr{P} \times \mathscr{P}$$

   是同构，

则称$\mathscr{P}$是一个$\mathscr{G}$挠子(torsor).

定义. 设G是代数群，$P, X \in \mathbf{Sch}_{/S}$且$\pi : P \to X$是光滑的满态射，若存在态射$\sigma : G \times_S P \to P$满足

1. 下图交换：

$$\begin{tikzcd} G \times G \times P \arrow[r, "{(\mu, \mathrm{id}_P)}"] \arrow[d, "{(\mathrm{id}_G, \sigma)}"'] & G \times P \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times P \arrow[r, "\sigma"] & P, \end{tikzcd}$$

2. 存在恒等截面$e : X \to P$满足

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "{(e, \mathrm{id}_P)}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_P"'] & G \times_S P \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

   交换，

3. 态射$\sigma \times \mathrm{pr}_2 : G \times P \to P \times_X P$是同构，

则称P是G主从(principal G-bundle).

13 商叠

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X/G \arrow[d] \\ \{*\} \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$

A 附录：点函子

定义. 设X是S上的概型，则X的一个T点是一个态射$f : T \to X$满足交换图

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

任意给定概形X，我们说明所有X上的点都是某个T点.令$(R, \mathfrak{m})$是局部环，$f : \mathrm{Spec}\ R \to X$是态射，$x$是$\mathfrak{m}$对应的（闭）点，于是这给出了芽局部环之间的局部态射

$$f^{\#} : \mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}\ R, \mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} = R.$$

引理 A.1 (01J5). 设X概形，$(R,\mathfrak{m})$是局部环，那么如上给出了一一对应

$$\{\text{态射} f : \operatorname{Spec} R \to X\} \leftrightarrow \{(x,\varphi) \mid x \in X, \varphi : \mathscr{O}_{X,x} \to R\}.$$

证明. □

进一步地，

定理 A.1. 给定概形X，那么X上的点一一对应于某个K点，其中K是域.

如果给定一个S上的概型X，那么函子

$$h_X := \hom_{S-\mathbf{Sch}}(-,X) : S-\mathbf{Sch} \to \mathbf{Set}$$

给出了所有可能的T点，即给定的概型确定其上所有的点.反过来这个事情是否成立？下面的命题给出了部分答案：

命题 A.2. 设R是交换环，$S = \operatorname{Spec} R$，那么函子

$$\begin{aligned} h : S-\mathbf{Sch} &\to \mathbf{Funct}(R-\mathbf{Alg}, \mathbf{Set}) \\ X &\mapsto h_X \end{aligned}$$

是范畴的等价.

证明. url □

例 23. 考虑函子

$$\begin{aligned} F : \mathbf{CommRing} &\to \mathbf{Set} \\ R &\mapsto h_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]}(\operatorname{Spec} R), \end{aligned}$$

可以证明$h_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]}(\operatorname{Spec} R)$自然同构于$R$，理解为$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$的$R$点具有$R$的特征，这也是我们称$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$为仿射直线的原因.

例 24. 考虑函子

$$\begin{aligned} F : \mathbf{CommRing} &\to \mathbf{Set} \\ R &\mapsto R^\times, \end{aligned}$$

可以证明$F \cong \hom_{\mathbf{CommRing}}(\mathbb{Z}[x,x^{-1}],-)$.

例 25. 给定素数p，考虑函子

$$\begin{aligned} F : \mathbf{CommRing} &\to \mathbf{Set} \\ R &\mapsto \{x \in R \mid px = 0\}, \end{aligned}$$

可以证明$F \cong h_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x]/(x^p)}$.

习题 A.1. 设X是局部Noether的概型，求证h_X可以被限制到Noether环的满子范畴上.

我们考虑如下的例子：$X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$，由于$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$是个域，故该概形只有一个点，但是如果考虑$X_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x]/(x^2+1) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x+i) \times \mathbb{C}[x]/(x-i))$.注意到$X$不是一个$\mathbb{R}$点（因为若有环同态$\varphi : \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{R}$，那么$\varphi(x) \in \mathbb{R}$满足$0 = \varphi(x^2+1) = \varphi(x)^2+1$），这很容易理解——在这个点上的层不是$\mathbb{R}$.对于一个概型，即便它是定义在

例 26. 给定函子

$$\begin{aligned} F : R-\mathbf{Algebra} &\to \mathbf{Set} \\ A &\mapsto \{(P, s_1, \cdots, s_r) \mid \text{满足}P\text{是投射}A\text{模，}s_i \in P\text{且}s_0, \cdots, s_n\text{生成}P\}/\sim, \end{aligned}$$

其中$(P, s_0, \cdots, s_n) \sim (Q, t_0, \cdots, t_n)$当且仅当存在$A$模的同构$f : P \to Q$使得$f(s_i) = t_i$，那么可以证明这个函子同构于$h_{\mathbb{P}^n}$.

我们考虑复合函子

$$\mathbf{Sch}_S \to \mathrm{Fun}(\mathbf{Sch}_S^{\circ}, \mathbf{Set}) \to \mathrm{Fun}(\mathbf{Ring}, \mathbf{Set}),$$

其中第一个是Yoneda嵌入，第二个函子是$\mathrm{Fun}(\mathrm{Spec}\,-, \mathbf{Set})$.第一个函子显然是满忠实的，但第二个函子不是的.考虑$\hom_{\mathbf{Sch}_S}(\mathrm{Spec}\,-, \mathbb{P}^n_S)$和$\hom_{\mathbf{Sch}_S}(\mathrm{Spec}\,-, \mathbb{P}^m_S)$两个函子，它们都是映到空集的常值函子（从仿射概型到射影），但他们间有非平凡的态射诱导的自然变换.问题在于它们的复合是满忠实的

定义. 给定概型X，点$x \in X$是对任意仿射概型$\mathrm{Spec}\, R$，都给定

$$x_R \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}\, R, X) = X(R),$$

并且这样的对应是自然的.

定义. 设$F, G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$是两个给定的函子，若自然变换$\eta : F \Rightarrow G$满足对任意对象$A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$，映射

$$\eta_A : F(X) \to G(X)$$

都是单射，则称F是G的子函子(subfunctor).

定义. 设$F, G, H : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$是给定的函子，$\eta : F \Rightarrow H, \xi : G \Rightarrow H$是自然变换，那么$F$与$G$的纤维积(fibre product)$F \times_H G$是函子

$$\begin{aligned} F \times_H G : \mathcal{C} &\to \mathbf{Set} \\ A &\mapsto \{(a, b) \in F(A) \times G(A) \mid \eta_A(a) = \xi_A(b) \in H(A)\} \end{aligned}$$

定义. 设$\eta : F \Rightarrow G : \mathbf{Sch}_{/S} \to \mathbf{Set}$是子函子，若对任意

索引