# 射影空间

Guanyu Li

## 1 定义与基本概念

在这份材料中如非特殊声明，分次环都是 $\mathbb{N}$ 分次的交换环.

**定义.** 给定一个分次环 $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n$，令 $S_+ = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$，我们可以做构造 Proj $S$ 使得它成为一个概型：其中它的底拓扑空间

$$|\text{Proj } S| := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}\text{是 } S \text{ 的齐次素理想且不包含}S_+\},$$

称 $|\text{Proj } S|$ 中的理想为相关素理想 (relavant prime ideal)，对任意齐次理想 $I$，

$$V_+(I) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}\text{是相关素理想且}I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

是 $|\text{Proj } S|$ 中的闭集且 $|\text{Proj } S|$ 的拓扑完全由此给出；最后要给出 Proj $S$ 的结构层 $\mathscr{O}_{\text{Proj } S}$，取 $S$ 中次数为正的一个齐次元素 $f$，令开集

$$D_+(f) := |\text{Proj } S| - V_+(f),$$

作为集合 $|D_+(f)| \cong |\text{Proj } S[f^{-1}]|$，同时后者和 $S[f^{-1}]$ 中所有的 0 次元素组成的环 $S[f^{-1}]_0$ 中的素理想一一对应，即有双射

$$\varphi_f : |\text{Proj } S[f^{-1}]| \to |\text{Spec } S[f^{-1}]_0|$$

且它是连续的，这样我们可以给 $|D_+(f)|$ 同于 Spec $S[f^{-1}]_0$ 的概型结构，这样只要选取足够多的 $f$ 使得 $|D_+(f)|$ 构成一个开覆盖即可（后面的习题会给出这样一个开覆盖）.

**例 1.** 考虑 $S := k[x_0, \cdots, x_n]$，其中对任意的 $1 \le i \le n$，$\deg x_i = 1$. 于是，$x_0, \cdots, x_n$ 生成的理想是 $S_+$，那么 $\{D(x_i)\}_{i=0,\cdots,n}$ 构成了 Proj $S$ 的一个开覆盖.

$U_i \cap U_j$ 上的粘合

**例 2.** 考虑 $S := k[x_0, \cdots, x_3]/(x_0x_2 - x_1^2, x_1x_3 - x_2^2, x_0x_3 - x_1x_2)$，$U_0 = \text{Spec } k[x_1, \cdots, x_3]/(x_1^3 - x_3, x_2^3 - x_3^2, x_1x_2 - x_3) = \text{Spec } [x_0 = 1]$

**引理 1.1.** 设 $S$ 是 $\mathbb{Z}$ 分次的环，$f \in S$ 是阶数为正的元素，且它的逆存在. 那么 $S$ 中的相关素理想与 $S_0$ 中的素理想一一对应.

证明. 记 Spec $S$ 中的齐次素理想的集合为 $H$，$\deg f = d$，构造集合的映射

$$\varphi : H \leftrightarrows |\text{Spec } S_0| : \psi$$
$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap S_0$$
$$\sqrt{\mathfrak{q}S} \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{q}.$$

由于 $\mathfrak{p} \cap S_0$ 是 $\mathfrak{p}$ 在嵌入映射 $S_0 \hookrightarrow S$ 下的拉回，故 $\varphi$ 是良定义的.

另一方面，由于 $\mathfrak{q}$ 只包含阶数为 0 的元素，因此 $\mathfrak{q}S$ 是齐次理想. 任取 $g \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，它可以写成齐次元素的和

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i,$$

满足 $\deg g_1 < \deg g_2 < \cdots < \deg g_n$，由于 $\deg f > 0$，存在正整数 $m$ 使得 $\deg(f^m g_1) \geq 0$. 同时，$f^m g \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$ 意味着存在整数 $N$ 使得

$$(f^m g)^N = \left(f^m \sum_{i=1}^{n} g_i\right)^N = f^{mN} g_n^N + \text{其他低阶项} \in \mathfrak{q}S.$$

但 $\mathfrak{q}S$ 是齐次理想，因此 $f^{mN} g_n^N \in \mathfrak{q}S$，进而

$$\left(\frac{f^{mNd} g_n^{Nd}}{f^{mNd+N\deg g_n}}\right) \in \mathfrak{q}S \cap S_0 = \mathfrak{q}.$$

由于 $\mathfrak{q}$ 是素理想，$\left(\frac{g_n^d}{f^{\deg g_n}}\right)^N \in \mathfrak{q}$ 意味着 $\frac{g_n^d}{f^{\deg g_n}} \in \mathfrak{q}$，故 $g_n^d \in \mathfrak{q}S$，即

$$g_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}.$$

这样 $g - g_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，于是归纳地可证明 $g_i \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，因此 $\sqrt{\mathfrak{q}S}$ 是齐次的.

再证明 $\sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q}$. 显然 $\mathfrak{q} \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0$. 对任意 $g \in \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0$，存在正整数 $M$ 使得 $g^M \in \mathfrak{q}S$，阶数计算说明 $g^M \in \mathfrak{q}S \cap S_0 = \mathfrak{q}$，再根据 $\mathfrak{q}$ 的素性 $g \in \mathfrak{q}$，因此 $\sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 \subseteq \mathfrak{q}$.

若 $a = \sum_{i=1}^m a_i, b = \sum_{j=1}^n b_j$ 满足 $ab \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，那么由刚刚的证明 $a_n b_m \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，由于 $a_n, b_m$ 都是齐次元素，故

$$\frac{a_n^d}{f^{\deg a_n}} \frac{b_m^d}{f^{\deg b_m}} = \frac{a_n^d b_m^d}{f^{\deg a_n + \deg b_m}} \in \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q},$$

再次由于 $\mathfrak{q}$ 是素理想，$\frac{a_n^d}{f^{\deg a_n}} \in \mathfrak{q}$ 或 $\frac{b_m^d}{f^{\deg b_m}} \in \mathfrak{q}$，于是 $a_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$ 或 $b_m \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，归纳可以得到 $\sqrt{\mathfrak{q}S}$ 是素理想，而它不包含 $f$，因此是相关素理想，故 $\psi$ 也是良定义的.

之前证明了 $\psi \circ \varphi(\mathfrak{q}) = \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q}$，于是，只需要再证明 $\varphi \circ \psi = \text{id}$. 显然 $(\mathfrak{p} \cap S_0)S \subseteq \mathfrak{p}$，因此 $\sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S} \subseteq \mathfrak{p}$. 反过来任取 $\mathfrak{p}$ 中的齐次元素 $a$，$\frac{a^d}{f^{\deg a}} \in \mathfrak{p} \cap S_0$，因此 $a^d \in (\mathfrak{p} \cap S_0)S$，即 $a \in \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$，这意味着 $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$. □

**习题 1.1.** 1. 验证所有的 $V_+(I)$ 构成闭集.

2. 验证集合的双射 $\varphi_f : |\text{Proj } S[f^{-1}]| \to |\text{Spec } S[f^{-1}]_0|$ 及它是同胚.

3. 验证若 $S_+$ 中由齐次元素组成的子集 $T$ 满足它生成理想的根理想 $\sqrt{\langle T \rangle} = S_+$，那么

$$\{D(f) \mid f \in T\}$$

构成 Proj $S$ 的一组开覆盖.

4. 验证
$$D_+(f)\cap D_+(g)=D_+(fg)=D_+(f^m g^n),$$
其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$.

5. 证明
$$(S[f^{-1}][(g/f)^{-1}])_0\cong S[f^{-1}]_0[(g^{\deg f}/f^{\deg g})^{-1}]\cong S[f^{-1},g^{-1}]_0.$$

6. 证明以上给出的同构是相容的，即
说明以上的验证了之前的定义给出了一个概型.

证明. 1. 一方面，若 $\mathfrak{p}\in V_+(I)\cup V_+(J)$，那么相关素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $I\subseteq\mathfrak{p}$ 或 $J\subseteq\mathfrak{p}$，不妨设前者成立，于是 $I\cap J\subseteq I\subseteq\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}\in V_+(I\cap J)$. 另一方面若 $\mathfrak{p}\in V_+(I\cap J)$，则由交换代数 $I\subseteq\mathfrak{p}$ 或 $J\subseteq\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in V_+(I)\cup V_+(J)$.

再考虑 $\mathfrak{p}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)$，那么 $I_\lambda\subseteq\mathfrak{p}$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$ 成立，因此 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)\subseteq V_+(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda)$. 反过来若 $\mathfrak{p}\in V_+(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda)$，那么 $I_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\subseteq\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)$.

2. 构造
$$\begin{aligned}\varphi_f:|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|&\leftrightarrows|\mathrm{Spec}\ S[f^{-1}]_0|:\psi_f\\ \mathfrak{p}&\mapsto\mathfrak{p}\cap S[f^{-1}]_0\\ \sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}&\leftarrow\!\shortmid\mathfrak{q},\end{aligned}$$
引理 1.1说明二者是双射，于是只要验证二者连续即可. 若 $J$ 是 $S[f^{-1}]_0$ 的理想，那么
$$\begin{aligned}\psi_f(V(J))&=\psi_f(\{\mathfrak{q}\mid\mathfrak{q}\supseteq J\})\\&=\{\sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}\mid\mathfrak{q}\supseteq J\},\end{aligned}$$
显然 $JS[f^{-1}]\subseteq\sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}$,于是 $\psi_f(V(J))\subseteq V(JS[f^{-1}])=V(\sqrt{JS[f^{-1}]})$;反过来,若 $\mathfrak{p}\in V(\sqrt{JS[f^{-1}]})$,那么
$$\mathfrak{p}=\psi_f(\varphi_f(\mathfrak{p})),$$
因此 $\psi_f(V(J))=V(JS[f^{-1}])$，这样 $\varphi_f$ 是连续的.

另一方面，对 $|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|$ 中的闭集 $V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|$，
$$\begin{aligned}\varphi_f(V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|)&=\{\mathfrak{p}\cap S_0\mid\mathfrak{p}\in V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|\}\\&\subseteq V(I\cap S_0),\end{aligned}$$
而且对任意 $\mathfrak{q}\in V(I\cap S_0)$，
$$\mathfrak{q}=\varphi_f(\psi_f(\mathfrak{q})),$$
因此 $\varphi_f(V(J))=V(I\cap S_0)$，这样 $\psi_f$ 是连续的.

3. 任取 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Proj}\ S$，由定义存在 $f\in S_+$ 使得 $f\notin\mathfrak{p}$，由于 $S$ 是分次环，
$$f=(f_1+\cdots+f_n)^N,$$
使得每个 $f_i\in T$ 都是齐次的. 这样一定存在 $i_0$ 使得 $f_{i_0}\notin\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in D_+(f_{i_0})$.

4. 若 $\mathfrak{p}\in D_+(fg)$，那么 $fg\notin\mathfrak{p}$，显然 $f\notin\mathfrak{p}$ 且 $g\notin\mathfrak{p}$，所以 $D_+(fg)\subseteq D_+(f)\cap D_+(g)$. 反过来，若 $\mathfrak{p}\in D_+(f)\cap D_+(g)$，按定义 $f\notin\mathfrak{p}$ 且 $g\notin\mathfrak{p}$，因为 $\mathfrak{p}$ 是素理想，故 $D_+(f)\cap D_+(g)\subseteq D_+(fg)$，这意味着 $D_+(f)\cap D_+(g)=D_+(fg)$. 同样根据 $\mathfrak{p}$ 是素理想，$D_+(fg)=D_+(f^mg^n)$.

5. 构造

$$\varphi: S[f^{-1}][(g/f)^{-1}]\leftrightarrows S[f^{-1},g^{-1}]:\psi$$
$$\frac{\frac{r}{f^n}}{(g/f)^m}\mapsto\frac{r}{f^{n-m}g^m}$$
$$\frac{\frac{r}{f^{n+m}}}{(g/f)^m}\leftarrow\!\shortmid\frac{r}{f^ng^m},$$

显然二者是良定义的, 它们是齐次环同态，且互为逆映射. 于是，$S[f^{-1},g^{-1}]_0\cong(S[f^{-1}][(g/f)^{-1}])_0$. 若齐次元素

$$\frac{r}{f^ng^m}\in S[f^{-1},g^{-1}]$$

满足 $\deg\frac{r}{f^ng^m}=0$，那么由定义

$$\deg r=m\deg g+n\deg f.$$

同时，

$$\frac{r}{f^ng^m}=\frac{g^{m\deg f-m}f^{m\deg g}}{g^{m\deg f-m}f^{m\deg g}}\frac{r}{f^ng^m}=\left(\frac{f^{\deg g}}{g^{\deg f}}\right)^m\frac{g^{m\deg f-m}r}{f^{n+m\deg g}},$$

且 $\deg\left(\frac{f^{\deg g}}{g^{\deg f}}\right)^m\frac{g^{m\deg f-m}r}{f^{n+m\deg g}}=\deg\frac{g^{m\deg f-m}r}{f^{n+m\deg g}}=\deg r+\deg g(m\deg f-m)-\deg f(n+m\deg g)=0$. 这意味着 $S[f^{-1},g^{-1}]_0=S[f^{-1}]_0[(g^{\deg f}/f^{\deg g})^{-1}]$，得证.

以上的验证中, 前三条说明了存在一个仿射的开覆盖, 第四条说明开覆盖当中两个的交集是什么样的——它也是开覆盖中的一个，因此可以用前面的方式得到上面的层结构——第五条证明了层结构的相容性. 这样, Proj $S$ 是一个概型. □

特别地，我们记 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}:=\text{Proj }\mathbb{Z}[x_0,\cdots,x_n]$.

**引理 1.2.** *设 $S,T$ 是给定的分次环，$\varphi:S\to T$ 是分次环同态（即 $\varphi(S_n)\subseteq T_n$），那么*

*1. $U:=\{\mathfrak{q}\in\text{Proj }T\mid\varphi(S_+)\not\subseteq\mathfrak{q}\}$ 是 Proj $T$ 中的开集.*

*2. $\varphi$ 诱导了态射 $U\to\text{Proj }S$.*

证明. 1. 记 $X=\text{Proj }T$. 要证明 $U$ 是开集，只要证明 $X-U$ 是闭集即可. 令 $J:=(\varphi(S_+))$，那 $T$ 中的齐次素理想 $\mathfrak{q}$ 包含 $\varphi(S_+)$ 当且仅当它包含 $J$. 于是根据定义，$X-U=V_+(J)$ 是闭集，得证.

2. 首先给定映射 $f:U\to\text{Proj }S$，它将素理想 $\mathfrak{q}$ 映到 $(\varphi^{-1}(\mathfrak{q}))$，我们要验证它是连续的. 任取 Proj $S$ 中的闭集 $V_+(I)$，

$$\begin{aligned}f^{-1}(V(I))&=\{\mathfrak{q}\in U\mid f(\mathfrak{q})\in V_+(I)\}\\&=\{\mathfrak{q}\in U\mid\varphi^{-1}(\mathfrak{q})\supseteq I\}\\&=\{\mathfrak{q}\in\text{Proj }T\mid\varphi^{-1}(\mathfrak{q})\supseteq I\}\cap U,\end{aligned}$$

这是 $U$ 中的闭集，因此 $f$ 是连续映射.

接下来要给出层的态射 $f^{\#}:\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}|_U\to f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}$. 注意到

$$G=\{s\in S\mid s\text{是齐次元素且}\deg s>0\}$$

生成的理想的根理想是 $S_+$，于是 $\{D_+(s)\mid s\in G\}$ 是 $\mathrm{Proj}\ S$ 的一个开覆盖，于是只需要给出一族相容的环同态

$$(f^{\#})_s:\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s))\to f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s)).$$

注意到

$$\begin{aligned}f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s))&=\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(f^{-1}(D_+(s)))\\&=\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s))\cap U).\end{aligned}$$

注意到 $D_+(\varphi(s))=\mathrm{Spec}\ T[\varphi(s^{-1})]_0$ 是仿射概型，因此 $(f^{\#})_s$ 可以定义为复合

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s))=S[s^{-1}]_0\to\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s)))=T[\varphi(s^{-1})]_0\to\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s))\cap U),$$

其中第一个映射由 $\varphi$ 诱导，第二个映射是 $\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}$ 所给的信息.

对于相容性，给定 $s_1,s_2\in S$，只要证明图

$$\begin{tikzcd}\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s_1)) \arrow[r, "(f^{\#})_{s_1}"] \arrow[d] & f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s_1)) \arrow[d] \\ \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s_1s_2)) \arrow[r, "(f^{\#})_{s_1s_2}"] & f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s_1s_2))\end{tikzcd}$$

是交换的，即

$$\begin{tikzcd}S[s_1^{-1}]_0 \arrow[r] \arrow[d] & T[\varphi(s_1^{-1})]_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s_1))\cap U) \arrow[d] \\ S[s_1s_2^{-1}]_0 \arrow[r] & T[\varphi(s_1s_2^{-1})]_0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s_1s_2))\cap U)\end{tikzcd}$$

是交换的，但这由构造是明显的. □

**例 3.** 考虑环同态

$$\varphi:k[x_0,x_1,x_2,x_3]\to k[y_0,y_1]$$

满足

$$(x_0,x_1,x_2,x_3)\mapsto(y_0^3,y_0^2y_1,y_0y_1^2,y_1^3)$$

**命题 1.1.** 设 $R$ 是任意交换环，$S=R[x_0,\cdots,x_n]$，那么 $\mathrm{Proj}\ S=\mathbb{P}_R^n:=\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n\times\mathrm{Spec}\ R$.

证明. □

**例 4.** 考虑 $\mathbb{P}_k^1$，我们具体来说明定义是如何将

**习题 1.2.** 证明 $\mathbb{P}_R^r$ 是开集 $\mathbb{A}_R^r$ 和闭集 $\mathbb{P}_R^{r-1}$ 的不交并.

**习题 1.3.** 任意给定 $\mathbb{P}^n_R$ 中的两不同点 $P, Q$，求证存在超平面 $H$ 使得 $P \in H$ 且 $Q \notin H$.

**命题 1.2.** 设 $R$ 是交换环，$S = R[x_0, \cdots, x_n]$，那么态射 $\mathrm{Proj}\ S \to \mathrm{Spec}\ R$ 是正规的.

*证明.* 回顾概型之间的态射 $f : X \to Y$，是有限型的、分离的，且满足 $\square$

**例 5.** 给定 $R$ 上的概型 $X$，$f : X \to \mathbb{P}^1_R$ 是一个 $R$ 概型态射，由于 $\mathbb{P}^1_R = \mathbb{A}^1_0 \cup \mathbb{A}^1_\infty$，记 $X_0 := f^{-1}(\mathbb{A}^1_0), X_\infty := f^{-1}(\mathbb{A}^1_\infty)$，那么 $f$ 是 $f|_{X_0}$ 和 $f|_{X_\infty}$ 的粘合，其中 $f|_{X_0} : X_0 \to \mathbb{A}^1_0$ 和 $f|_{X_\infty} : X_\infty \to \mathbb{A}^1_\infty$ 都是到仿射概型的态射，因此二者分别对应于 $a \in \Gamma(X_0, \mathscr{O}_X|_{X_0}), b \in \Gamma(X_1, \mathscr{O}_X|_{X_1})$ 满足

$$a|_{X_0 \cap X_1} \cdot b|_{X_0 \cap X_1} = 1,$$

后面的条件是粘合所必须的.

反过来，若给定如上的组合信息，即 $X$ 的开覆盖 $X = X_0 \cup X_\infty$，开覆盖上的整体截面 $a \in \Gamma(X_0, \mathscr{O}_X|_{X_0}), b \in \Gamma(X_1, \mathscr{O}_X|_{X_1})$ 满足

$$a|_{X_0 \cap X_1} \cdot b|_{X_0 \cap X_1} = 1,$$

那么整体截面对应到态射 $f|_{X_0} : X_0 \to \mathbb{A}^1_0$ 和 $f|_{X_\infty} : X_\infty \to \mathbb{A}^1_\infty$，其中二者对应的环同态是 $R[s] \to \Gamma(X_0, \mathscr{O}_X|_{X_0}), s \mapsto a$ 和 $R[t] \to \Gamma(X_1, \mathscr{O}_X|_{X_1}), t \mapsto b$. 限制到交集之后的关系说明二者可以按照 $s \cdot t = 1$ 来粘合，这恰好给出了态射 $X \to \mathbb{P}^1_R$.

**习题 1.4.** 分类所有的态射

$$\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}.$$

**例 6.** 借助上一个例子，我们来证明 $\mathrm{Proj}\ R[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0x_3 - x_1x_2) \cong \mathbb{P}^1_R \times \mathbb{P}^1_R$. 为此需要验证相应的泛性质，即

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \mathrm{Proj}\ R[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0x_3 - x_1x_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^1_R = \mathrm{Proj}\ R[u, v] \arrow[d] \\
& \mathbb{P}^1_R = \mathrm{Proj}\ R[s, t] \arrow[r] & \mathrm{Spec}\ R,
\end{tikzcd}$$

为此需要找到自然的投影态射 $\mathrm{Proj}\ R[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0x_3 - x_1x_2) \to \mathbb{P}^1_R$，对任意的 $R$ 概型 $X$ 构造态射 $X \dashrightarrow \mathrm{Proj}\ R[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0x_3 - x_1x_2)$ 并验证它的唯一性.

首先对上面的结论加以解释，如上的方程 $x_0x_3 - x_1x_2$ 来自于 *Segre* 嵌入 $([s, t], [u, v]) \mapsto [su, sv, tu, tv]$，于是应当有对应关系 $D_+(x_0) \cong D_+(s) \times D_+(u), D_+(x_1) \cong D_+(s) \times D_+(v)$，这样 $D_+(x_0) \cup D_+(x_1)$ 就是 $\mathbb{A}^1_t$ 的原像（这里的下标表示 $t$ 可取 0 不可取 $\infty$ 的仿射开集），这样只需要计算

$$\Gamma(D_+(x_0) \cup D_+(x_1)) = R\left[\frac{x_2}{x_0}\right] = R\left[\frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_1}\right] / \left(\frac{x_2}{x_0} - \frac{x_3}{x_1}\right) = R\left[\frac{x_3}{x_1}\right],$$

直觉上这是因为 $D_+(x_0)\cup D_+(x_1)\cong D_+(s)\times\mathbb{P}^1_k$，在上面是 $s$ 可取逆.

第一步是构造态射 $\text{Proj }R[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_0x_3-x_1x_2)\to\mathbb{P}^1_R:=\text{Proj }R[s,t]$，它对应于自然的投影态射，按例 5的结果，只需要找到 $\text{Proj }R[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_0x_3-x_1x_2)$ 上的两个开集 $U_s=(\text{Proj }R[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_0x_3-x_1x_2))_s, U_t=(\text{Proj }R[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_0x_3-x_1x_2))_t$ 和两个开集上结构层的全局截面 $a,b$ 满足

$$a|_{U_s\cap U_t}\cdot b|_{U_s\cap U_t}=1.$$

注意到 $\Gamma(D_+(x_0))=R[\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0},\frac{x_3}{x_0}]/(\frac{x_3}{x_0}-\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0}),\Gamma(D_+(x_1))=R[\frac{x_0}{x_1},\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1}]/(\frac{x_0}{x_1}\frac{x_3}{x_1}-\frac{x_2}{x_1})$（习题 *1.5*说明 $D_+(x_i)$ 是仿射平面），并且

$$\begin{aligned}\Gamma(D_+(x_0)\cap D_+(x_1))&=\Gamma(D_+(x_0\cdot x_1))\\&=(R[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_0x_3-x_1x_2))[(x_0\cdot x_1)^{-1}]_0\\&=R[\frac{x_0}{x_1},1,\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0},\frac{x_3}{x_0},\frac{x_2^2}{x_0x_1},\frac{x_2x_3}{x_0x_1},\frac{x_3^2}{x_0x_1}]/(\frac{x_3}{x_1}-\frac{x_2}{x_0})\\&=R[\frac{x_0}{x_1},\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0}],\end{aligned}$$

这恰好对应了 $D_+(x_0\cdot x_1)$ 应当是 $D_+(s)\times D_+(uv)=\text{Spec }R[t,u,u^{-1}]$，于是有交换图

$$\begin{tikzcd}\Gamma(D_+(x_0)\cup D_+(x_1)) \arrow[r]\arrow[d] & R[\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0},\frac{x_3}{x_0}]/(\frac{x_3}{x_0}-\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0}) \arrow[d]\\ R[\frac{x_0}{x_1},\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1}]/(\frac{x_0}{x_1}\frac{x_3}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}) \arrow[r] & R[\frac{x_0}{x_1},\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0}],\end{tikzcd}$$

并且根据开覆盖的性质它是拉回图，因此

$$\Gamma(D_+(x_0)\cup D_+(x_1))=R\left[\frac{x_2}{x_0},\frac{x_3}{x_1}\right]/\left(\frac{x_2}{x_0}-\frac{x_3}{x_1}\right).$$

这也符合直觉，$D_+(x_0)\cup D_+(x_1)$ 应当是 $\mathbb{A}^1_R\times\mathbb{P}^1_R$. 同样地，

$$\Gamma(D_+(x_2)\cup D_+(x_3))=R\left[\frac{x_0}{x_2},\frac{x_1}{x_3}\right]/\left(\frac{x_0}{x_2}-\frac{x_1}{x_3}\right),$$

于是取 $U_s=D_+(x_0)\cup D_+(x_1),U_t=D_+(x_2)\cup D_+(x_3)$，两个整体截面分别是 $\frac{x_2}{x_0}=\frac{x_3}{x_1}$ 和 $\frac{x_0}{x_2}=\frac{x_1}{x_3}$. 这给出了态射 $\text{Proj }R[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_0x_3-x_1x_2)\to\mathbb{P}^1_R:=\text{Proj }R[s,t]$，另一个态射 $\text{Proj }R[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_0x_3-x_1x_2)\to\mathbb{P}^1_R:=\text{Proj }R[u,v]$ 可以类似地给出.

第二步，作为例 5的类比，我们考虑从任意概型 $X$ 到 $\text{Proj }R[x_0,x_1,x_2,x_3]/(x_0x_3-x_1x_2)$ 的态射.

最后，我们来验证

**习题 1.5.** 给定交换环 $R$，求证存在 $R$ 代数同态

$$R[x,y,z]/(z-xy)\cong R[s,t].$$

证明. 考虑（由此扩张的）环同态

$$\begin{aligned} R[x,y,z]/(z-xy) &\leftrightarrows R[s,t] \\ x &\mapsto s \\ y &\mapsto t \\ z &\mapsto st \\ x &\leftarrow s \\ y &\leftarrow t, \end{aligned}$$

明显地给出了同构. □

**习题 1.6.** 设 $S$ 是分次交换环，对任意正整数 $d$，定义 $S$ 的第 $d$ 个 Veronese 子环为

$$S^{(d)} := \bigoplus_{n\geq 0} S_{dn}.$$

1. 证明 $\mathrm{Proj}\ S \cong \mathrm{Proj}\ S^{(d)}$.
2. 证明若 $S = R[x,y]$，作为分次环（甚至只作为环）$S$ 与 $S^{(d)}$ 不同构.

证明. 1. 由于 $S^{(d)}$ 自然地是 $S$ 的子环，我们将 $S^{(d)}$ 的元素当作 $S$ 中的元素. 对任意 $f \in S_{dn}$，记

$$D_+^{(d)}(f) := |\mathrm{Proj}\ S^{(d)}| - V_+^{(d)}(f),$$

那么可以构造映射

$$\begin{aligned} \varphi_f : D_+^{(d)}(f) &\leftrightarrows D_+(f) : \psi_f \\ \mathfrak{p} &\mapsto \sqrt{\mathfrak{p}S} \\ \mathfrak{q} \cap S^{(d)} &\leftarrow \mathfrak{q}, \end{aligned}$$

显然 $\psi_f$ 是良定义的，另一方面

$$\sqrt{\mathfrak{p}S} = \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$$

□

# 2 射影空间的闭子概型

**命题 2.1.** 设 $I$ 是分次交换环 $S$ 的齐次理想，那么存在集合的包含

$$|\mathrm{Proj}\ S/I| \subseteq |\mathrm{Proj}\ S|,$$

并且子集 $|\mathrm{Proj}\ S/I|$ 与任意仿射开集 $(\mathrm{Proj}\ S)_f$ 的交都是 $(\mathrm{Proj}\ S)_f$ 中的闭集，并且交集对应的子概型同构于 $(\mathrm{Proj}\ S/I)_f$. 因此 $\mathrm{Proj}\ S/I$ 可看作 $\mathrm{Proj}\ S$ 的闭子概型.

证明. □

**定义.** 给定交换环 $R$，取 $S = R[x_0, \cdots, x_n]$ 和 $\mathbb{P}^n_R = \mathrm{Proj}\ S$ 中的闭集（投影代数簇）$X$，那么 $S$ 的齐次理想

$$I(X) := \langle f \in S \mid f\text{是其次元素且}f([a_0 : \cdots : a_n]) = 0\rangle$$

被称为代数簇 $X$ 的理想 (ideal).

$$0 \to \mathscr{I}_Y \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y \to 0$$

**例 7.** 考虑分次 $S$ 模

$$0 \to S(-1) \xrightarrow{\cdot x_i} S \to S/(x_i) \to 0$$

诱导了

$$0 \to \mathscr{O}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_R} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_R} \to 0,$$

**例 8.** 在例 6中我们讨论了 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 作为 $\mathbb{P}^3$ 中的一个闭子概型的坐标，借助它我们可以证明 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^3$ 中的闭曲线都是由如下类型的多项式

$$F = F(u_0, u_1, v_0, v_1)$$

给出，其中 $F$ 在 $(u_0, u_1)$ 和 $(v_0, v_1)$ 上分别是阶数为 $d_0, d_1$ 的齐次多项式.

**例 9.** 在例 2中我们讨论了 $C$，接下来我们将说明 $C$ 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的闭曲线，且例 8中描述的多项式是

$$F = u_0 v_1^2 - u_1 v_0^2.$$

在进行接下来的讨论前，我们首先回顾一些交换代数中的结果.

**定义.**
1. 给定 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 中的理想 $I$，$I$ 的首项系数理想 (ideal of leading terms)$LT(I)$ 是 $I$ 的所有首项系数生成的（$k[x_1, \cdots, x_n]$ 中的）理想，即

$$LT(I) := \langle LT(f) \mid f \in I\rangle.$$

2. 给定域 $k$ 和多项式环 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 上的单项序 $\geq$，理想 $I \subseteq F[x_1, \cdots, x_n]$ 的 Gröbner 基 (Gröbner basis) 是 $I$ 的一组生成元 $\{g_1, \cdots, g_m\}$ 使得 $I$ 的首项系数理想由这组生成元的首项系数生成，即

$$I = (g_1, \cdots, g_m),\ \ LT(I) = (LT(g_1), \cdots, LT(g_m)).$$

**定理 2.2.** 给定 $R = F[x_1, \cdots, x_n]$ 上的一个单项序 $\geq$，且 $\{g_1, \cdots, g_m\}$ 是非零理想 $I$ 的一组 *Gröbner* 基，那么

1. 任意多项式 $f(x) \in R$ 可以唯一地写成
$$f = f_I + r$$
的形式，其中 $f_I \in I$ 且余数 $r$ 的任意单项都不可以被首项系数 $LT(g_1), \cdots, LT(g_m)$ 整除.

2. $f_I$ 和 $r$ 都可以用多项式带余除法来计算，且与 $\{g_1, \cdots, g_m\}$ 的选取顺序无关.

3. 余数 $r$ 给出了 $R/I$ 中的唯一代表元，特别地 $f \in I$ 当且仅当 $r = 0$.

**例 10.** 考虑考虑 $S := k[x_0, \cdots, x_3]$ 中的多项式 $f_1 = x_0x_2 - x_1^2, f_2 = x_0x_3 - x_1x_2, f_3 = x_1x_3 - x_2^2$，它们在字典序下的首项分别为 $m_1 = x_0x_2, m_2 = x_0x_3, m_3 = x_1x_3$. 首先注意到齐次多项式 $m \in S_d$ 被任意 $m_i$ 整除当且仅当

1. $m = x_0^a x_1^{d-a}$ 满足 $0 < a < d$，或

2. $m = x_1^a x_2^{d-a}$ 满足 $0 < a < d$，或

3. $m = x_2^a x_3^{d-a}$.

注意到这样的单项式共有 $3d + 1$ 个.

我们接着例 9，如上的讨论实际上说明了理想 $(f_0, f_1, f_2)$ 是素理想.

# 3 射影空间上的层

**定理 3.1.** 给定交换环 $R$ 和 $R$ 上的概型 $X$，

1. 若 $f : X \to \mathbb{P}_R^n$ 是 $R$ 同态，那么 $f^*\mathscr{O}(1)$ 是 $X$ 上的可逆层，且由全局截面 $\{s_i := f^*(x_i)\}_{i=0,\cdots,n}$ 生成，

2. 反过来给定 $X$ 上的可逆层 $\mathscr{L}$，且 $\mathscr{L}$

**定义.** 给定分次环 $S$ 和分次 $S$ 模 $M$，如下构造给出 $\tilde{M}$：按定义 $D_+(f)$ 给出 Proj $S$ 的一族仿射开覆盖，取
$$\tilde{M}(D_+(f)) = (M_f)_0,$$
其中 $(M_f)_0$ 是 $M$ 关于 $f$ 局部化的阶数为 0 的部分.

**定义.** 给定分次环 $S$，则 Proj $S$ 上的层 $\mathscr{O}(n)$ 是 $\widetilde{S(n)}$，其中 $S(n)$ 定义为分次 $S$ 模，满足

$$S(n)_d := S_{n+d}.$$

**例 11.** 我们来考虑射影空间 $\mathbb{P}^n_R$ 的可逆层 $\mathscr{O}(1)$. 记 $S = R[x_0, \cdots, x_n]$，按照例 *1*的分析，$\mathbb{P}^n_R$ 有仿射开覆盖 $\{U_i := \text{Spec } R[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}]\}_{i=0,\cdots,n}$，于是

$$\mathscr{O}(1)(U_i) = ((S(1))_{x_i})_0 = \left\langle \frac{f}{x_i^d} \middle| f\text{是}S\text{中的齐次元素且}\deg f = d+1 \right\rangle,$$

最后一个等式是由于做局部化时 $x_i \in S$ 满足阶数为 1，且张成是 $R$ 模在 $(S(1))_{x_i}$ 中的. 于是映射

$$\frac{f}{x_i^d} \mapsto \frac{f}{x_i^{d+1}}$$

恰好给出了 $R[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}]$ 模同构 $((S(1))_{x_i})_0 \cong R[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}]$，这意味着 $\mathscr{O}(1)$ 是局部自由的.

另一方面，考虑如上给出的局部平凡化的转移函数，在 $D_+(x_i) \cap D_+(x_j) = D_+(x_i x_j)$ 上，考虑

$$\varphi_{i,j} : (\mathscr{O}(1)|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} \to (\mathscr{O}(1)|_{U_j})|_{U_i \cap U_j}$$
$$(((S(1))_{x_i x_j})_0) \cong R[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}]_{\frac{x_j}{x_i}} \to R[\frac{x_0}{x_j}, \cdots, \frac{x_n}{x_j}]_{\frac{x_i}{x_j}} \cong (((S(1))_{x_i x_j})_0),$$

其中按照之前的描述，

$$((S(1))_{x_i x_j})_0 = \left\langle \frac{f}{x_i^d x_j^d} \middle| f\text{是}S\text{中的齐次元素且}\deg f = 2d+1 \right\rangle$$

并且同构是 $\frac{f}{x_i^d x_j^d} \mapsto \frac{f}{x_i^{d+1} x_j^d}$，另一个对应地是 $\frac{f}{x_i^d x_j^d} \mapsto \frac{f}{x_i^d x_j^{d+1}}$，这样转移函数很明显的是

$$\frac{f}{x_i^{d+1} x_j^d} \mapsto \frac{f}{x_i^d x_j^{d+1}} = \frac{f}{x_i^{d+1} x_j^d} \frac{x_i}{x_j}.$$

非常类似地，$\mathbb{P}^n_R$ 上的层 $\mathscr{O}(m)$ 也是可逆层，转移函数是 $\cdot \left(\frac{x_i}{x_j}\right)$.

在古典代数几何中，给定 $k$ 代数簇 $X$，$D$ 是 $X$ 的余维数为 1 的不可约子簇，那么可以定义

$$\mathscr{O}_{X,D} := \{f \in k[X] \mid f\text{在}X\text{的开集}U\text{上有定义且}U \cap D \neq \emptyset\}$$

**定义.** 给定分次环 $S$ 和 Proj $S$ 上的层 $\mathscr{F}$，那么分次 $S$ 模

$$\Gamma_*(\mathscr{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^0(\mathscr{F}(n))$$

称为 $\mathscr{F}$ 对应的分次 $S$ 模 (graded $S$-module associated to $\mathscr{F}$).

**命题 3.2.** 给定环 $R$ 和 $R$ 上的多项式环 $S := R[x_0, \cdots, x_n]$，那么

$$\Gamma_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}) \cong S.$$

*证明.* □

这个命题对非多项式环并不成立；但是反过来我们有

**命题 3.3.** 给定分次环 $S$，满足 $S$ 是 $S_1$ 生成的 $S_0$ 代数，那么对于 $\mathrm{Proj}\ S$ 上的任意拟凝聚层 $\mathscr{F}$ 存在自然的同构

$$\widetilde{\Gamma(\mathscr{F})} \cong \mathscr{F}.$$

*证明.* □

**引理 3.1.** 给定概型 $X$ 和可逆层 $\mathscr{L}$，取 $f \in \Gamma(X, \mathscr{L})$，定义 $X_f := \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathscr{L}_x\}$，且 $\mathscr{F}$ 是 $X$ 上的拟凝聚层.

1. 若 $X$ 是拟紧的，那么若 $\mathscr{F}$ 的全局截面 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ 满足 $s|_{X_f} = 0$，那么存在 $n > 0$ 使得 $f^n s \in \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n)$ 为 0 截面，

2. 进一步假设 $X$ 可以由有限多个仿射开集 $\{U_i\}_{i=1,\cdots,m}$ 覆盖，满足 $\mathscr{L}|_{U_i}$ 是自由的且 $U_i \cap U_j$ 是拟紧的，那么对于任意的 $t \in \Gamma(X_f, \mathscr{F})$，存在 $n$ 使得 $f^n t$ 延拓为 $\mathscr{F}$ 的一个全局截面.

**定理 3.4.** 给定 *Noether* 环 $R$ 和 $R$ 上射影概型 $X$ 的凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模 $\mathscr{F}$，那么存在正整数 $N$ 使得对所有的 $n > N$，$\mathscr{F}(n)$ 都是全局生成的.

*证明.* 设 $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R$ 是闭浸入，且 $i^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1) = \mathscr{O}_X(1)$，那么 $i_* \mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^n_R$ 上的凝聚层，并且 $(i_* \mathscr{F})(n) = i_*(\mathscr{F}(n))$. 这样 $(i_* \mathscr{F})(n)$ 是全局生成的当且仅当 $i_*(\mathscr{F}(n))$ 是全局生成的（事实上二者的生成元是相同的），于是这个问题归结到 $\mathbb{P}^n_R$ 上的凝聚 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_R}$ 模 $\mathscr{F}$.

按照之前的讨论，我们有仿射开覆盖 $\mathbb{P}^n_R = \bigcup_{i=0}^n U_i$，于是存在有限生成的 $R[x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n]$ 模 $\mathscr{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$. 对任意的 $i$，取定 $M_i$ 的一族（有限多个）生成元 $\{s_{i,j}\}$，根据引理 3.1存在（一致的）自然数 $n$ 使得 $x_i^n s_{i,j}$ 扩张为 $\mathscr{F}(n)$ 的全局截面 $t_{i,j}$. □

**例 12.** 记 $C$ 是例 *2*中的曲线，我们现在来说明

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2 \xrightarrow{A} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to \mathscr{I}_C \to 0$$

是正合的，其中 $A$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.

事实上，这还是一个局部结果，比如考虑开子集 $U_0 = \{x_0 = 1\}$，在其上 $I_0 = (x_2 - x_1^2, x_3 - x_1x_2)$，令 $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, z = \frac{x_3}{x_0}$，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & y \\ y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y - x^2 \\ 0 & z - xy \end{pmatrix},$$

行列变换取自 $k[x, y, z]$.

于是我们有正合列

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2 \xrightarrow{A} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^3 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathscr{O}_C \to 0,$$

而事实上这个层正合列来自于 $S$ 模的正合列

$$0 \to S(-3)^2 \xrightarrow{A} S(-2)^3 \to S \to S/I \to 0.$$

# 4 全局 Proj 构造

**定理 4.1.**

# 5 切空间和切锥

**习题 5.1.** 给定域 $k$，求证 $\mathbb{P}_k^n$ 中的所有 $d$ 阶超平面自然地构成 $\mathbb{P}_k^N$，其中 $N = \binom{n+d}{n} - 1$.

证明.

$$X_d = \{\sum a_l x^l = 0\} \leftrightarrow \{a_l\}.$$

□

**例 13.** 我们尝试分类 $\mathbb{P}_k^1$ 上的所有线丛.

# 6 Blow-up 构造和图

图是特殊的 blow-up.

# 7 射影空间的上同调

**定理 7.1.** 给定 *Noether* 环 $R$，$S := R[x_0, \cdots, x_d]$，$\mathbb{P}_R^d = \mathrm{Proj}\ S$ 是 $R$ 上的 $d$ 维射影空间，$\mathscr{O}(1)$ 是 *Serre* 扭曲层，那么

1. 自然存在的分次 $S$ 模同构
$$S \to \Gamma_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)),$$
2. 对任意的 $0 < i < d$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，$H^i(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)) = 0$，
3. $H^d(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-d-1)) \cong R$，
4. 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$，映射
$$H^0(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)) \times H^d(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-d-n-1)) \to H^d(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}\mathbb{P}^d_R(-d-1)) \cong R$$
是有限生成自由 $R$ 模的配对.

**推论 7.1.1.** 如定理的假定，
$$H^q(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)) = \begin{cases} (R[x_0, \cdots, x_d])_n & q = 0, \\ 0 & q \neq 0, d, \\ (\frac{1}{x_0\cdots x_d} R[\frac{1}{x_0}, \cdots, \frac{1}{x_d}])_n & q = n. \end{cases}$$

**定理 7.2.** 给定 *Noether* 环 $R$，$X$ 是 $R$ 上的射影概型，$\mathscr{O}(1)$ 是 $X$ 的一个相对于 $\operatorname{Spec} R$ 的极丰可逆层，$\mathscr{F}$ 是 $X$ 上的凝聚层，那么

1. 对任意的 $i \geq 0$，$H^i(X, \mathscr{F})$ 是有限生成的 $R$ 模，
2. 存在依赖于 $\mathscr{F}$ 的正整数 $N$ 使得对任意 $n > N$ 和 $i > 0$，$H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$.

证明. □

**命题 7.3.** 给定 *Noether* 环 $R$ 和 $\operatorname{Spec} R$ 上的正规概型 $X$，$\mathscr{L}$ 是 $X$ 上的可逆层，那么如下等价：

1. $\mathscr{L}$ 是丰满的，
2. 对任意 $X$ 上的凝聚层 $\mathscr{F}$，都存在（依赖于 $\mathscr{F}$ 的）正整数 $N$ 使得对任意 $n > N$ 和 $i > 0$，$H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) = 0$.

**定理 7.4** ($\mathbb{P}^n_k$ 的对偶)**.** 给定域 $k$ 和 $\mathbb{P}^n_k = \operatorname{Proj} k[x_0, \cdots, x_n]$，那么

1. $H^n(\mathbb{P}^n_k, \omega_{\mathbb{P}^n_k}) \cong k$，并且接下来选定一个同构，

2. 对任意 $\mathbb{P}_k^n$ 上的凝聚层 $\mathscr{F}$，自然存在的配对

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\omega)\times H^n(\mathbb{P}_k^n,\mathscr{F})\to H^n(\mathbb{P}_k^n,\omega)\cong k$$

是非退化的，

3. 对任意的 $i\geq 0$，存在自然的同构

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\omega)\cong H^{n-i}(\mathbb{P}_k^n,\mathscr{F})^\vee.$$

# 8 Hilbert

**定义.** 给定射影概形 $X\subseteq\mathbb{P}_k^n$，$S$ 是其射影坐标环，那么 $S$ 的 Hilbert 多项式（函数或级数）被称为概形 $X$ 的 Hilbert 多项式（函数或级数）(Hilbert polynomial, function, series).

**例 14.** 假设 $k$ 是无限域，$S:=R[x_0,\cdots,x_3]$，给定 $\mathbb{P}_k^2=\mathrm{Proj}\ S$ 中的三点 $p_1,p_2,p_3$，那么 $M:=S/I(p_1,p_2,p_3)$ 的 *Hilbert* 函数满足如下描述：

1. 它的 0 阶多项式只有 0，因此 $h_M(0)=0$；它其中的 1 阶多项式的全体 $I_1(p_1,p_2,p_3)$ 满足

$$I_1(p_1,p_2,p_3)=\begin{cases}k\cdot f & p_1,p_2,p_3\text{共线且}f\text{是经过三点的唯一直线}\\ 0 & p_1,p_2,p_3\text{不共线},\end{cases}$$

因此

$$h_M(1)=\begin{cases}1 & p_1,p_2,p_3\text{共线}\\ 0 & p_1,p_2,p_3\text{不共线}.\end{cases}$$

2. 考虑

$$\begin{aligned}\varphi: k[x_0,x_1,x_2]_2 &\to k^3\\ f&\mapsto f(p_1,p_2,p_3),\end{aligned}$$

明显地 $\ker\varphi=I_2(p_1,p_2,p_3)$，只要能说明 $\varphi$ 是满射就可以说明

$$h_M(2)=\dim_k M_2=\dim_k k[x_0,\cdots,x_3]-\dim_k I(p_1,p_2,p_3)_2=\dim_k \mathrm{Im}\ \varphi=3.$$

事实上，由于 $k$ 是无限域，存在只经过三点中其中一点 $p_i$ 的线性多项式 $L_i$，于是 $L_iL_j$ 是只经过 $p_i,p_j$（可重复）的二阶多项式，因而

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

在 $\varphi$ 的像中，因此是满射.

3. 如上的讨论事实上证明了 $h_M(n)=3$ 对所有的 $n\geq 2$ 成立.

若多项式 $p(z) \in \mathbb{Q}[z]$ 满足对充分大的 $n \in \mathbb{Z}$, $p(n) \in \mathbb{Z}$, 则称 $p(z)$ 是数值多项式 (numerical polynomial).

**引理 8.1.** *若 $p(z)$ 是 $d$ 阶数值多项式，那么存在整数 $c_0, \cdots, c_d$ 使得*

$$p(z) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{z}{i},$$

*其中，$\binom{z}{i} = \frac{z(z-1)\cdots(z-i+1)}{i!}$.*

*证明.* 首先证明对任意的单项式 $z^n$ 是 $\left\{\binom{z}{i}\right\}_{i=1,\cdots,k-1}$ 的 $\mathbb{Q}$ 线性组合. 显然当 $n=0$ 和 $n=1$ 时成立. 归纳假设当 $n=1,\cdots,k-1$ 时，$z^n$ 是 $\left\{\binom{z}{i}\right\}_{i=1,\cdots,k-1}$ 的 $\mathbb{Q}$ 线性组合，同时注意到

$$\binom{z}{k} = \frac{z(z-1)\cdots(z-i+1)}{k!} = \frac{z^k}{k!} + \text{其他低阶项},$$

按照归纳假设 $z^k$ 也是 $\left\{\binom{z}{i}\right\}_{i=1,\cdots,k-1} \bigcup \left\{\binom{z}{k}\right\}$ 的线性组合. 如上结果说明若 $p(z)$ 是整系数多项式则 $p(z)$ 是 $\left\{\binom{z}{i}\right\}_{i=1,\cdots,k-1}$ 的 $\mathbb{Q}$ 线性组合. 这个线性组合是唯一的，因为基变换矩阵是上三角矩阵.

回到引理，若 $d=0$, 那么 $p(z)$ 是整数，满足引理. 归纳假设当 $d=1,\cdots,n$ 时，引理成立. 现在假设 $p(z)$ 是 $n+1$ 阶数值多项式，由前面的结果

$$p(z) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{z}{i},$$

其中 $c_i \in \mathbb{Q}$. 考虑

$$\Delta p(z) := p(z+1) - p(z) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{z}{i},$$

这实际上来源于等式

$$\binom{z}{i} + \binom{z}{i-1} = \binom{z+1}{i}.$$

此时 $\deg \Delta p(z) = n$，于是归纳假设说明 $c_i \in \mathbb{Z}$. 最后 $c_0 \in \mathbb{Z}$ 是显然的. □

**定义.** 给定射影概形 $X \subseteq \mathbb{P}_k^m$，且 $\dim X = n$，那么其 Hilbert 多项式首项系数的 $n!$ 倍被称为 $X$ 的阶数 (degree).

**例 15.**

**例 16.**

**引理 8.2.** *任意射影概形 $X \subseteq \mathbb{P}_k^m$ 的阶数是整数.*

*证明.* 设 $p_X(z)$ 是 $X$ 的 Hilbert，根据 8.1

$$p(z) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{z}{i} = \frac{c_d}{d!} z^d + \cdots,$$

于是结果是明显的. □

# 9 应用：Hirzebruch 曲面