正当映射和万有闭映射

Guanyu Li

1 正当映射

定义. 给定拓扑空间X, Y及连续函数$f : X \to Y$，若Y的任意紧子集K都使得$f^{-1}(K)$是X中的紧子集，则称映射f是正当的(proper).

例 1. 给定$\mathbb{R}^n$中的有限子集A，连续函数$f : \mathbb{R}^n - A \to \mathbb{R}^m$满足对任意$a \in A$，

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty,$$

那么f是正当的.

这是因为，取紧集$K \subset \mathbb{R}^m$，那么K被一个充分大的球体D包含，根据条件$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$，$f^{-1}(D)$也被一个充分大的球体$C$包含，再根据条件$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$，$f^{-1}(D)$被$E := C - \bigcup_{i=1}^{|A|} N_i$包含，其中$N_i$是$a_i$的某个充分小邻域.注意到$C$本身是紧的，且$E$是$C$中的闭集，因此$E$也是紧的，即$f^{-1}(K)$被紧集包含.同时$f$的连续性说明$f^{-1}(K)$是闭集，因而也是紧集.

特别地，取$n = m = 2$，并且将$\mathbb{R}^2$和$\mathbb{C}$等同起来，对任意的非零多项式$p(z), q(z)$，若$\deg p(z) > \deg q(z)$则$f(z) := p(z)/q(z)$满足上述的条件.

定义. 给定拓扑空间的子集族$\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，若$\mathcal{C}$中任意有限个子集的交都非空，则称$\mathcal{C}$有有限相交性质.

引理 1.1. 给定拓扑空间X，它是紧空间当且仅当任意其满足有限相交性质的闭子集族$\mathcal{C}$，$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset$.

证明. $\mathcal{U} := \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$

- 子集族$\mathcal{C}$是闭子集族当且仅当$\mathcal{U}$是开子集族.
- $\mathcal{U}$是X的开覆盖当且仅当$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset$.
- $\mathcal{C}$有有限相交性质当且仅当$\bigcup \mathcal{U} = X$.

□

定理 1.1. 给定*Hausdorff*空间X,Y，满足Y要么是可距离化的、要么是局部紧的，映射$f:X\to Y$是连续的，那么f是正当的当且仅当f是闭映射（即将闭集映到闭集）且对任意$y\in Y$，$f^{-1}(y)$都是紧集.

证明.

- 首先考虑充分性.假定连续映射f是闭映射，且满足任意单点的原像是紧集，我们要证明任意紧集的原像是紧集.

  任意给定Y中的紧集K，并且任意给定$f^{-1}(K)$的满足有限相交性质的闭子集族$\mathcal{C}$；不妨假设$\mathcal{C}$中元素的任意有限交还在$\mathcal{C}$中，否则，取新的子集族$\mathcal{D}:=\left\{\bigcap_{i=1}^N C_i\middle|C_i\in\mathcal{F}\right\}$即可（注意到若子集族$\mathcal{C}$中只有闭集，那么$\mathcal{D}$中也只有闭集）.

  由于f是闭映射，$f(C_\lambda)$是K中的闭集，注意到

  $$\emptyset\neq f\left(\bigcap_{i=1}^N C_i\right)\subseteq\bigcap_{i=1}^N f(C_i)$$

  因而K中的闭子集族$f(\mathcal{C}):=\{f(C_\lambda)\mid C_\lambda\in\mathcal{C}\}$也满足有限相交性质.根据$K$的紧性，$\bigcap_{C\in\mathcal{C}}f(C)\neq\emptyset$.取交集中的点$y$，对任意的$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$，

  $$f^{-1}(\{y\}\cap C_{\lambda_1}\cap\cdots\cap C_{\lambda_N})\neq\emptyset,$$

  于是闭子集族$f^{-1}(y)\cap\mathcal{C}:=\{f^{-1}(y)\cap C_\lambda\mid C_\lambda\in\mathcal{C}\}$满足有限相交性质.根据$f^{-1}(y)$的紧性知

  $$\bigcap f^{-1}(y)\cap\mathcal{C}=\bigcap_{C\in\mathcal{C}}f^{-1}(y)\cap C\neq\emptyset,$$

  于是包含这个交集的$\bigcap_{C\in\mathcal{C}}C$也不为空，$f^{-1}(K)$的紧性得证.

- 再假定f是正当映射，且Y是局部紧或可距离化的.我们要证明f是闭映射.对X的任意闭集C，$f|_C$也是正当的，于是只需要证明$f(X)$是Y中的闭集即可

  – 假定Y是局部紧的，任取$\overline{f(X)}$中的点y，记K是y的紧邻域，于是$f^{-1}(K)$是X中的紧集，于是$f|_{f^{-1}(K)}$是闭映射（紧Hausdorff空间之间的映射一定是闭映射）.这样，$f(f^{-1}(K))=K\cap f(X)$是Y中的闭集，但y是该集合的极限点，因而在其中，这证明了$\overline{f(X)}=f(X)$.

  – 假定Y是可距离化的，任取X中的闭集C和C中的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，令$y=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$（假定极限在$Y$中存在）.记

  $$C_n:=\{y,f(x_n),f(x_{n+1}),\cdots\},$$

  明显地它们是紧集，于是$\{f^{-1}(C_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$X$中的嵌套紧集序列，根据$C_1$的紧性

  $$\emptyset\neq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(f^{-1}(C_n)\cap C)=\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(C_n)\right)\cap C=f^{-1}(y)\cap C,$$

  于是$y\in f(C)$，即f是闭映射.

□

从证明中我们可以看出，充分性并不需要对Y的拓扑做出要求，定理中的条件只在必要性中起作用.对于充分性，事实上当X是k空间的时候也是正确的——我们来证明在此情形下f是闭映射，f是闭映射当且仅当对任意紧集$K \subseteq X$，$f(X) \cap K$是紧集；同时$f(X) \cap K = f(f^{-1}(K))$，并且由于$f$是正当的该集合是紧集，于是$f^{-1}(K)$是紧集，进而$f(f^{-1}(K))$是紧集.

定理 1.2. 给定拓扑空间X,Y和正当映射$f : X \to Y$，B是Y的子空间，那么$f|_{f^{-1}(B)}$也是正当的.反过来，若Y的覆盖$\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$要么是开覆盖，要么是有限闭覆盖，且$f|_{f^{-1}(V_\lambda)}$是正当的，则$f$也是正当的.

证明. 首先考虑充分性.记$f_B := f|_{f^{-1}(B)}$，那么对任意B中的紧集K，$f_B^{-1}(K) = f^{-1}(K)$，根据f本身的正当性，这是一个紧集，于是f_B按定义是正当的.

再考虑必要性.记$f_\lambda := f|_{f^{-1}(V_\lambda)}$并任取$Y$中的紧集$K$.

- 若$\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是开覆盖，由$K$的紧性存在有限多个开集$V_1, \cdots, V_k$，使得$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_i$.令$W_i := K \cap V_i$，那么$W_1, \cdots, W_k$是$K$的有限开覆盖，根据??? [Munkres Thm36.1, pp225-226] 存在闭集（进而是紧集）$F_i \subseteq W_i$使得$K = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$，于是$f^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(F_i)$.由于每个$f_i$都是正规的，于是每个$f^{-1}(F_i)$都是紧的，因此这些有限个紧集的并$f^{-1}(K)$也是紧的.
- 若$\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是有限闭覆盖，令$K_\lambda := K \cap V_\lambda$，于是$K_\lambda$都是紧集；根据条件假设每个$f^{-1}(K_\lambda)$也都是紧集，这样$f^{-1}(K) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(K_\lambda)$作为有限个紧集的并集也是紧的，即证明了结论.

□

定理 1.3. 给定指标集I，对任意$i \in I$，$f_i : X_i \to Y_i$是拓扑空间之间的连续映射.记$\prod f_i : \prod X_i \to \prod Y_i$是对应的乘积空间之间的映射，那么$\prod f_i$是正当的当且仅当对任意$i \in I$，$f_i$是正当映射.

证明. 必要性.任取$i_0 \in I$，对任意$i \neq i_0$，取$x_i \in X_i$，且令$y_i := f(x_i) \in Y_i$.记

$$\iota_{i_0} : X_{i_0} \to X_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} \{x_i\} \quad 和 \quad \mu_{i_0} : Y_{i_0} \to Y_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} \{y_i\}$$

是分别将X_{i_0}和Y_{i_0}嵌入到乘积空间的映射，于是根据乘积空间的泛性质，

$$\left(\prod f_i\right) \circ \iota_{i_0} = \mu_{i_0} \circ f_{i_0}.$$

取Y_{i_0}中的紧集K，于是我们有

$$\iota_{i_0}(f_{i_0}^{-1}(K)) = \left(\prod f_i\right)^{-1} \mu_{i_0}(K),$$

由于乘积映射$\prod f_i$是正当的，故$\iota_{i_0}(f_{i_0}^{-1}(K))$是紧集；但$\iota_{i_0}$是到一个乘积空间闭子空间的同胚，因此$f_{i_0}^{-1}(K)$也是紧集.

□

定理 1.4. 给定指标集I，对任意

证明. $\square$