几何中的向量丛

G.Li

1 流形的切丛

给定一个n维的微分流形M，有光滑函数层$C^\infty(-)$，进而可以定义一点x的光滑函数芽

$$C_x^\infty := \mathrm{colim}_{x\in U} C^\infty(U),$$

由于流形的局部完全由$\mathbb{R}^n$中的开集决定，且可以选取足够小的的邻域而不改变光滑函数芽.点x上的一个切向量是一个$\mathbb{R}$线性映射

$$v : C_x^\infty \to \mathbb{R}$$

满足Leibnitz定律

$$v(f\cdot g) = v(f)g(x) + f(x)v(g).$$

例如，对M上过点x的可微曲线$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$（满足$\gamma(0) = x$），

$$v(f) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma(t))\right|_{t=0}$$

是切向量.切向量实际是方向导数.

一点$x \in M$上的所有切向量组成的集合有自然的$\mathbb{R}$线性空间结构，称这个空间为M在点x的切空间，记为T_xM.切空间T_xM的维数恰好等于流形M的维数，这因为可以选取x附近充分小的邻域$(U, x^1, \cdots, x^n)$使得对应到$\mathbb{R}^n$中是一个球$B(0,\epsilon)$，如前例子取M中的曲线

$$\gamma_j : (-\epsilon, \epsilon) \to M, 1 \le j \le n,$$

满足$x^i(\gamma_j(t)) = \delta^i_j t$，其中$\delta^i_j$是Kroneker记号.定义

$$\frac{\partial}{\partial x^j} := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\circ\gamma_j(t))\right|_{t=0},$$

这些构成了T_xM的一组基.T_xM的对偶空间称为余切空间，它的对偶基记为$\{\mathrm{d}x_i\}_{1\le i\le n}$，任给定一个函数$f \in C_x^\infty$，都有余切向量$\mathrm{d}f$满足

$$\left\langle \mathrm{d}f, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} f.$$

给定光滑流形间的光滑映射$\varphi : M \to N$，自然诱导了一个映射

$$\begin{aligned}\varphi^* : C^\infty_{\varphi(x)} &\to C^\infty_x\\ f &\mapsto f\circ\varphi,\end{aligned}$$

于是这自然可以称为一个映射

$$\begin{aligned}\varphi_* : T_x M &\to T_{\varphi(x)} N \\ v &\mapsto v(- \circ \varphi),\end{aligned}$$

该映射称为切映射.

定理 1.1. *设M是n维光滑流形，令*

$$TM := \coprod_{x \in M} T_x M$$

是M上的切向量的全体，那么存在TM上的拓扑和光滑结构使得TM是一个$2n$维光滑流形.

证明. 按定义，TM中的点是形如(x, v)的配对，其中$x \in M$，$v \in T_x M$.定义映射

$$\begin{aligned}\pi : TM &\to M \\ (x, v) &\mapsto x,\end{aligned}$$

这样对于任意一点$x \in M$，$\pi^{-1}(x) = T_x M$.

假定M的光滑结构是$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n)\}_{\lambda \in \Lambda}$，考虑

$$\pi^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_{x \in U_\lambda} T_x M,$$

于是$TM = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda)$.借助$\varphi_\lambda$，我们给定局部的同胚

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\lambda)$$

满足对于$x \in U_\lambda, y = (y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^n$，

$$\psi_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\bigg|_x$$

其中$x_\lambda^i = (\varphi_\lambda)^i, i = 1, \cdots, n$是$U_\lambda$上由坐标映射$\varphi_\lambda$给出的局部坐标系.很明显这个映射是集合上的双射.

借助局部的乘积空间，可以给出TM一个拓扑结构.考虑TM中的子集族

$$\mathcal{B} := \{\psi_\lambda(W) \mid W\text{是}U_\lambda \times \mathbb{R}^n\text{中的开集}\},$$

这可以构成TM的一个拓扑基：首先$\{(U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$是$M$的一个开覆盖，因此$\mathcal{B}$是$TM$的开覆盖；接下来还需要验证对任意$(x, v) \in TM$，若有$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$使得$(x, v) \in B_1 \cap B_2$则有$B \in \mathcal{B}$满足$(x, v) \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.由于$U_\lambda \times \mathbb{R}^n$具有乘积拓扑结构，因而可以找到$U_\lambda, U_\mu$中的开集$D_1, D_2$和$\mathbb{R}^n$中的开集$V_1, V_2$使得$\psi_\lambda(D_1 \times V_1) \subseteq B_1, \psi_\mu(D_2 \times V_2) \subseteq B_2$，这样只要证明存在某个$U_\nu$中的开集$D$和$\mathbb{R}^n$中的开集$V$使得

$$(x, v) \in \psi_\nu(D \times V) \subseteq \psi_\lambda(D_1 \times V_1) \cap \psi_\mu(D_2 \times V_2),$$

如此可得到TM上的拓扑，并且这是一个第二可数的Hausdorff空间.

在上述假定下，

$$x = \pi(x, v) \in D_1 \cap D_2 \subseteq U_\lambda \cap U_\mu$$

且

$$v=\sum_{i=1}^{n} y^{i} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^{i}}\bigg|_{x}=\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}^{i} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}^{i}}\bigg|_{x}=\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{y}^{j} \frac{\partial x_{\lambda}^{i}}{\partial x_{\mu}^{j}}(\varphi_{\lambda}(x)) \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^{i}}\bigg|_{x},$$

其中$(y^1,\cdots,y^n)\in V_1$，$(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)\in V_2$，因此它们之间有关系式

$$y^{i}=\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}^{i} \frac{\partial x_{\lambda}^{i}}{\partial x_{\mu}^{j}},$$

$\frac{\partial x_{\lambda}^{i}}{\partial x_{\mu}^{j}}$是光滑流形$M$从局部坐标系$(U_\lambda,x_\lambda^i)$到$(U_\mu,x_\mu^i)$的坐标变换Jacobi矩阵.

考虑映射$\Phi_{\lambda,\mu}:(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\subseteq U_\mu\times\mathbb{R}^n\to(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\subseteq U_\lambda\times\mathbb{R}^n$使得

$$\Phi_{\lambda,\mu}(x,(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n))=(x,(y^1,\cdots,y^n)),$$

其中$(y^1,\cdots,y^n)$与$(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)$服从之前计算的关系式，因此$y^i$是关于$x,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n$的光滑函数.由于

$$\det \frac{\partial x_{\lambda}^{i}}{\partial x_{\mu}^{j}}\neq 0,$$

所以$\Phi_{\lambda,\mu}$有逆映射$\Phi_{\mu,\lambda}=\Phi_{\lambda,\mu}^{-1}$，且它也是光滑的，这意味着$\Phi_{\lambda,\mu}:(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\to(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n$是光滑同胚.由定义可知

$$\psi_\lambda\circ\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}=\mathrm{id}:\pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu)\to\pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu),$$

即有交换图

$$\begin{tikzcd}
U_\mu\times\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\Psi_{\lambda,\mu}"] \arrow[dr, "\psi_\mu"'] & & U_\lambda\times\mathbb{R}^n \arrow[dl, "\psi_\lambda"] \\
& \pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu). &
\end{tikzcd}$$

在先前的设定下不妨取$D_1=D_2=D_1\cap D_2$，由于$\Psi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)$是$U_\lambda\times\mathbb{R}^n$的开集，并且$\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}(x,v)=\psi_\lambda^{-1}(x,v)\in D_1\times V_1$，所以开集$\Phi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)$与开集$D_1\times V_1$相交非空，因此存在点$\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}(x,v)=\psi_\lambda^{-1}(x,v)$在开集$\Phi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)\cap D_1\times V_1$中的邻域$D\times V$，其中$D$是$U_\lambda$ 的开子集，V是$\mathbb{R}^n$的开子集.这样$\psi_\lambda(D\times V)\in\mathcal{B}$且

$$(x,v)\in\psi_\lambda(D\times V)\subseteq\psi_\mu(D_2\times V_2)\cap\psi_\lambda(D_1\times V_1),$$

于是$\mathcal{B}$是TM的拓扑基.

事实上，在TM上建立拓扑的直观意义很明确，在给定两个邻近的切向量$(x_1,v_1),(x_2,v_2)$时，首先它们的起点x_1,x_2是邻近的，因而可以落在同一个坐标邻域内，于是经过坐标变换v_1,v_2可以在同一个坐标系内表示出来.那么，切向量$(x_1,v_1),(x_2,v_2)$相互邻近的第二个要求就是当它们在同一个坐标系内表示出来时，分量的差别很小.这就是这里给定的拓扑.

接下来再建立微分结构.如前所述，$\{\pi^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$构成了$TM$的一个开覆盖，对每个指标$\lambda\in\Lambda$，定义映射

$$\begin{aligned}
\xi_\lambda:\pi^{-1}(U_\lambda)&\to\mathbb{R}^{2n}\\
\sum_{i=1}^{n} y^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}\bigg|_{x}&\mapsto(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n).
\end{aligned}$$

这样ξ_λ是从$\pi^{-1}(U_\lambda)$到$\mathbb{R}^{2n}$中的开集$\varphi_\lambda(U_\lambda)\times\mathbb{R}^n$的同胚，因此$(\pi^{-1}(U_\lambda),\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$是$TM$的一个坐标卡，使得它成为一个拓扑流形.如此，还需要证明坐标卡是C^∞相关的.注意到$\pi^{-1}(U_\lambda)$与$\pi^{-1}(U_\mu)$相交非空的充要条件是$U_\lambda\cap U_\mu\neq\emptyset$，此时坐标变换

$$\xi_\mu\circ\xi_\lambda^{-1}:\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\to\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n$$

由下式给出

$$(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n)\mapsto(x_\mu^1,\cdots,x_\mu^n,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n),$$

其中$x_\mu^i=(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})^i(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n)$，且

$$\tilde{y}^i=\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial x_\mu^i}{\partial x_\lambda^j}.$$

这样，$x_\mu^i,\tilde{y}^i$都是x_λ^i,y^i的光滑函数，因此TM是光滑流形. □

注意到在TM的这个光滑结构下，映射$\pi:TM\to M$限制在局部坐标$\pi^{-1}(U)$上的表达式为

$$\varphi_\lambda\circ\pi\circ\xi_\lambda^{-1}(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n)=(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n),$$

于是π是光滑映射.另外，

$$\xi_\lambda\circ\psi_\lambda(x,(y^1,\cdots,y^n))=\xi_\lambda\left(\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\bigg|_x\right)=(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n),$$

所以$\psi_\lambda:U_\lambda\times\mathbb{R}^n\to\pi^{-1}(U_\lambda)$是光滑同胚.同时该光滑同胚满足对所有的$(x,y)\in U_\lambda\times\mathbb{R}^n$，

$$\pi\circ\psi_\lambda(x,y)=x,$$

即有交换图

$$\begin{tikzcd}
U_\lambda\times\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\
& U_\lambda. &
\end{tikzcd}$$

再固定$x\in U_\lambda$，考虑映射

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(x,-):\mathbb{R}^n&\to\pi^{-1}(x)\\ y&\mapsto\psi_\lambda(x,y),\end{aligned}$$

按定义它将$(y^1,\cdots,y^n)$映到$\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\Big|_x$，因此是一个线性同构.这样当$x\in U_\lambda\cap U_\mu$时，存在两个线性同构$\psi_\lambda(x,-),\psi_\mu(x,-):\mathbb{R}^n\to\pi^{-1}(x)$，因而有线性同构

$$\psi_\mu(x,-)\circ\psi_\lambda(x,-)^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,$$

这个同构是证明中的映射

$$(y^1,\cdots,y^n)\mapsto(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n),$$

恰好是局部坐标变换$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}$

例 1. *考虑$S^2\subseteq\mathbb{R}^3$，有嵌入$S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$.那么$S^2$的切丛可表示为*

$$TS^2=\{((x,y,z),(u,v,w))\mid xu+yv+zw=0\}\subseteq S^2\times\mathbb{R}^3.$$

2 流形的向量丛

将切丛的概念做推广，我们得到了如下流形上向量丛的概念：

定义. 设E, B是两个光滑流形，$\pi : E \to B$是光滑的满映射.若存在M的一个开覆盖$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$以及一组被称为局部平凡化(local trivialization)的光滑同胚

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\lambda)$$

使得

1. 下图交换

$$\begin{tikzcd} U_\lambda \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_\lambda. & \end{tikzcd}$$

2. 对任意给定的$x \in U_\lambda$，由局部平凡化诱导的

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n &\to \pi^{-1}(x) \\ \mathbf{v} &\mapsto \psi_\lambda(x, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

是拓扑空间的同胚，且对于任意$x \in U_\lambda \cap U_\mu$，复合映射

$$g_{\mu,\lambda}(x) := \psi_\mu^{-1}(x, -) \circ \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n$$

是线性同构，即$g_{\mu,\lambda} \in GL_n(\mathbb{R})$.

3. 上一部分确定的映射

$$g_{\mu,\lambda} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL_n(\mathbb{R})$$

是光滑的.

都满足，则称(E, π)是B上的秩(rank)为n的向量丛(vector bundle).

对任意$x \in B$，$E_x := \pi^{-1}(x)$被称为E在点x上的纤维(fibre)，ψ_λ称为局部平凡化(local trivialization).其中第一条是描述局部平凡化是局部的“丛映射”，只在相同的纤维上做对应；第二条是说，不同的局部平凡化只是用不同的方式看纤维上的线性结构；第三条决定了丛的属性，这里是光滑向量丛.

我们注意到，

例 2. *设$G_k(\mathbb{R}^n)$是Grassmann流形，定义*

$$\gamma_{k,n} := \{(V, v) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid v \in V \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

$\pi : \gamma_{k,n} \to G_k(\mathbb{R}^n)$是映射$(V, v) \mapsto V$.如下的构造使得$\pi : \gamma_{k,n} \to G_k(\mathbb{R}^n)$是一个向量丛，称为万有向量丛(universal bundle).对于流形$G_k(\mathbb{R}^n)$，存在开覆盖

$$U_{i_1,\cdots,i_k} := \{A \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \mid \det A_{i_1,\cdots,i_k} \neq 0\}$$

其中$1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$是$k$个不同的正整数，$A_{i_1,\cdots,i_k}$是取$A$中第$i_1, \cdots, i_k$行组成的子矩阵.存在唯一的列变换（这里只能用列变换，因为我们不想改变生成的子空间）使得$A_{i_1,\cdots,i_k} = I_k$，而剩余行组成A对应到$\mathbb{R}^{k\times(n-k)}$中的坐标.于是，可以构造以下的结构

$$\begin{tikzcd} U_{i_1,\cdots,i_k} \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, "\psi_{i_1,\cdots,i_k}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_{i_1,\cdots,i_k}, & \end{tikzcd}$$

其中$\psi_{i_1,\cdots,i_k}$是映射

命题 2.1. 若$\pi : E \to B$是n秩光滑向量丛，则E上任意点x上的纤维E_x都有自然的线性结构使得E_x是n维向量空间.

事实上，我们并不需要一个向量丛的基是流形，对于一般的（好的）拓扑空间，同样可以定义向量丛：

定义.

定义. 给定空间B及其上的两个向量丛$\pi_1 : E_1 \to B, \pi_2 : E_2 \to B$，

定理 2.2. 设$f : D \to B$是连续映射，$p : E \to B$是秩为n的向量丛，那么拓扑空间

$$f^*E := \{(d, e) \in D \times E \mid f(d) = p(e)\}$$

是D上的向量丛.f^*E称为向量丛E的拉回*(pullback)*，如下图

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ D \arrow[r] & B. \end{tikzcd}$$

事实上，这个结果对于纤维丛也正确.

证明. □

引理 2.1. 对任意丛态射

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "q"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2, \end{tikzcd}$$

都存在拓扑空间的同胚

$$g : D \to f^*E$$
$$x \mapsto (p(x), \tilde{f}(x))$$

使得二者是B_1上同构的纤维丛.

习题 2.1. 设$i : Y \hookrightarrow X$是子空间的嵌入映射，证明

$$i^*(E) \cong E|_Y.$$

习题 2.2. $\mathbb{CP}^n$的tautological线丛的Thom空间是$\mathbb{CP}^{n+1}$.

例 3. 所有光滑流形的切丛都可以称为某个向量丛的拉回.

拓扑上，向量丛的分类是一个核心而且有趣的问题.

命题 2.3. 设$\pi: E \to B$是秩为n的光滑向量丛，那么它的转移函数族$\{g_{\mu,\lambda}: U_\lambda \cap U_\mu \to GL_n(\mathbb{R})\}$满足下列相容性条件:

1. $g_{\lambda,\lambda}(p) = I$对所有点$p \in U_\lambda$成立，其中$I$是单位矩阵；
2. 若$U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\eta \neq \emptyset$，那么对任意$p \in U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\eta$，
$$g_{\lambda,\mu}(p) \cdot g_{\mu,\eta}(p) = g_{\lambda,\eta}(p).$$

定理 2.4. 设M是n维流形，$\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$是一个开覆盖.若对任意一对指标$\lambda, \mu$，在$U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$时都指定了一个光滑映射
$$g_{\lambda,\mu}: U_\lambda \cap U_\mu \to GL_r(\mathbb{R}),$$
满足命题**??**中的条件，则存在同构下唯一的r秩向量丛$\pi: E \to M$，以$\{g_{\lambda,\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$为转移函数.

2.1 截面

定义. 给定空间B及其上的向量丛$\pi : E \to B$，若连续映射$s : B \to E$满足$\pi \circ s = \mathrm{id}_B$，则称$s$是$E$的截面(section).空间$B$上的向量丛$E$的截面的全体记为$\Gamma(B, E)$.

例 4. 考虑光滑流形M及其上的平凡线丛$M \times \mathbb{R}$，我们尝试写出截面的具体含义.给定一个截面s，那么s是映射
$$M \to M \times \mathbb{R},$$
记$s(x) = (s_1(x), s_2(x))$，其中$s_1(x) \in M$是流形中的点，$s_2(x) \in \mathbb{R}$.$\pi \circ s = \mathrm{id}$说明$s_1(x) = x$，于是$s$完全由映射$s_2 : M \to \mathbb{R}$决定；但由于$s$本身是连续的因此$s_2$也是连续的，故上面的讨论说明$M \times \mathbb{R}$上的截面对应于$M$上的连续函数.

当向量丛并不是平凡的时候，截面则并不能如此简单地描述.考虑向量丛$\pi : E \to B$的截面$s : B \to E$，局部平凡化在开覆盖$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$上给出了映射
$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n,$$
因此复合
$$U_i \xrightarrow{s|_{U_i}} \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times \mathbb{R}^n$$
是映射$x \mapsto (x, \boldsymbol{f}_i(x))$，其中$\boldsymbol{f}_i(x)$是$\mathbb{R}^n$中的向量，且取值关于$x \in U_i$是连续的.类似地，取另一个局部坐标的时候复合
$$(\mathrm{id}, \boldsymbol{f}_j) : U_j \xrightarrow{s|_{U_j}} \pi^{-1}(U_j) \xrightarrow{\varphi_j} U_j \times \mathbb{R}^n$$
同样给出了连续函数$\boldsymbol{f}_j : U_j \to \mathbb{R}^n$.同时，交换图
$$\begin{tikzcd}
 & & U_i \times \mathbb{R}^n \arrow[dd, "\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}"] \\
U_i \arrow[r, "s|_{U_i \cap U_j}"] & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\
 & & U_j \times \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

例 5. 考虑光滑流形M及其上的切丛TM，

定义. 纤维丛平凡化

命题 2.5. 给定纤维丛$E \to B$和开集$U \subseteq B$，那么存在一一对应

$$\Gamma(U,E) \leftrightarrow \{U\text{上的平凡化}h : \pi^{-1}(U) \to U \times F\}.$$

2.2 向量丛的构造

引理 2.2. 任意给定拓扑空间X的两个开覆盖$\mathcal{U},\mathcal{V}$，都存在同时从属于它们的开覆盖$\mathcal{W}$.

定理 2.6. 设E,F是B上的两个向量丛，那么$\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F) := \coprod_{x\in B}\mathrm{Hom}(E_x,F_x) = \{(x,A) \mid x \in B, A \in \mathrm{Hom}(E_x,F_x)\}$有自然的拓扑结构使得$\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F)$成为$B$上的向量丛，且每个截面$s : B \to \mathscr{H}\mathrm{om}(E,F)$都是一个向量丛态射$E \to F$.

证明. 根据定义，设$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$和$\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$是$B$的开覆盖，分别可以给出$E$与$F$的局部平凡化.依据拓扑中的结论，可以找到$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$共同的加细使得$E,F$在这个开覆盖上都有平凡化，依旧记这个加细为$\mathcal{U}$.

明显地存在自然的投影映射

$$\begin{aligned}\pi : \mathscr{H}\mathrm{om}(E,F) &\to B\\ (x,A) &\mapsto x,\end{aligned}$$

在这个映射下$\pi^{-1}(x) = \mathrm{Hom}(E_x,F_x)$，我们需要给出$\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F)$上的拓扑结构，使得$\pi$是连续的，并且可以给定转移函数.取$B$从属于开覆盖$\mathcal{U}$的一组开集基，

对任意$U_i \in \mathcal{U}$，E,F在U_i上都有平凡化，分别记为$\varphi_i : \pi_E^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$和$\psi_i : \pi_F^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^m$，于是可以构造

$$\mathscr{H}\mathrm{om}(\varphi_i,\psi_i) : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$$

□

推论 2.6.1. 若$\varphi \in \Gamma\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F)$满足对每个$x \in B$，$\varphi_x$都是同构，那么$\varphi^{-1}$存在且$\varphi^{-1}$是连续的.

习题 2.3. 设E是X上的向量丛，证明存在自然同构

$$\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F) \cong E^* \otimes F.$$

例 6. 设$\pi_1 : E_1 \to B, \pi_2 : E_2 \to B$是两个

3 复流形的向量丛

在之前的一节中我们提到了

4 概型的向量丛

例 7. 考虑$X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1)$，$M$是$R = \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1)$模$R\oplus R\oplus R$的子模

$$\{(u,v,w)\in R\oplus R\oplus R \mid xu+yv+zw=0\},$$

那么$\tilde{M}$是局部自由的，它对应了一个向量丛.

例 8. 考虑$X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathrm{Spec}\ R$，$I = (2, 1+\sqrt{-5})$.这个理想不是主理想，因而$R \ncong I$.但是$R_2 \cong I_2, R_3 \cong I_3$，且$D(2), D(3)$是$\mathrm{Spec}\ R$的开覆盖，因此$\tilde{I}$是局部自由的.

5 G主丛

考虑李群G作用在给定的流形M上，如果作用是自由的，那么任意点$x\in M$的轨道$O_x \cong G$.例如，$SO(2)$在$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$的作用.

定义. 给定拓扑群G和纤维丛$\pi : P \to B$，满足如下条件

1. G在P上有自由的（右）作用σ，
2. 存在同胚$f : B \to P/G$满足

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mathrm{id}} & P \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & P/G, \end{array}$$

即$P\to B$与$P \to P/G$作为纤维丛是同构的，

则称$P \to B$是一个G主丛(principal G-bundle).

命题 5.1. 若$P \xrightarrow{\pi} B$是G主丛，则

1. 群G的作用是在纤维上的，即对任意$b\in B$和$g \in G$，$\pi^{-1}(b)\cdot g \subseteq \pi^{-1}(b)$.
2. 群G作用在纤维F上的作用是可迁的，于是$F \cong G$.

证明. 1. 假设$b_1 \neq b_2 \in B$满足存在$x_1 \in \pi^{-1}(b_1)$，使得$x_2 := x_1 \cdot g \in \pi^{-1}(b_2)$，这样

$$f(b_1) = [x_1] = [x_2] = f(b_2),$$

其中$[x_1]$是x_1在商映射$P \to P/G$下的像，与f是同胚矛盾，得证.

2. 任取$x, y \in \pi^{-1}(b)$，

$$[x] = f(\pi(x)) = f(\pi(y)) = [y],$$

于是存在$g \in G$使得$x\cdot g = y$.

□

例 9. *Hopf*纤维化$S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$是一个$S^1$主丛.

例 10. 任意给定一个光滑流形M，且维数$\dim M = n$，定义空间$LM \to M$如下：对任意点$x \in M$，

$$L_xM := \{(e_1, \cdots, e_n) \mid \{e_1, \cdots, e_n\}\text{构成}T_xM\text{的一组基}\} \cong GL(n, \mathbb{R}),$$

且$LM := \coprod_{x\in M} L_xM$，类似于之前$TM$的构造，给$LM$一个由$M$诱导的坐标图卡.

接下来我们说明LM是一个$GL(n, \mathbb{R})$主丛.

例 11. 给定离散群G，我们如下地构造空间EG:

定义. 设$P_1 \xrightarrow{\pi_1} B_1$和$P_2 \xrightarrow{\pi_2} B_2$分别是给定的$G_1$主丛和$G_2$主丛，那么一个主丛态射(morphism)是映射对($f : P_1 \to P_2, g : B_1 \to B_2, \varphi : G_1 \to G_2$)，满足图

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
B_1 \arrow[r, "g"] & B_2
\end{tikzcd}$$

是交换图，且f关于φ是等变的.

从态射意味着将纤维映到纤维，准确地说，

引理 5.1. 给定流形B上的两个G主丛$\pi_1 : P_1 \to B$和$\pi_2 : P_2 \to B$，若$f : P_1 \to P_2$是主丛态射，那么f是同构.

证明. 设P_1中的两点x, y满足$f(x) = f(y)$，那么由于f是丛态射，因此$\pi_1(x) = \pi_1(y)$，这样x, y在同一点的纤维上，于是存在唯一的$g \in G$使得$x = y \cdot g$.这样，

$$f(x) = f(y \cdot g) = f(y) \cdot g = f(y),$$

于是$g = e$，这意味着$x = y$.

另一方面，对任意的$z \in P_2$，任取$x \in \pi^{-1}(\pi(z))$.命题**??**说明群作用是可迁的，于是存在$g \in G$使得$f(x) \cdot g = z$，再根据f的等变性，$f(x \cdot g) = z$，即f是满射. □

这意味着给定基流形的所有主丛的范畴是一个群胚.

定理 5.2. G主丛$\pi : P \to B$是平凡的当且仅当存在截面$s : B \to P$.

证明. 考虑映射

$$\begin{aligned} g : B \times G &\to P \\ (b, g) &\mapsto s(b) \cdot g, \end{aligned}$$

若能够证明它是主丛态射，则根据引理**??**这必然是同构. □

定理**??**说明纤维丛的拉回是纤维丛，特别地，

推论 5.2.1. 给定G主丛$P \to B$，则$P \times_B P \to P$是一个平凡G主丛，它的平凡化映射可以由

$$\sigma \times \mathrm{pr}_2 : P \times G \to P \times_B P$$

给出，

证明. 拉回的泛性质说明存在对角截面

$$
\begin{array}{ccc}
P & & \\
& P \times_B P & P \\
& P & B,
\end{array}
$$

因此$P \times_B P \to P$是平凡G主丛. □

推论 5.2.2. 给定群G和纤维丛$P \to B$，则$P \to B$是G主丛当且仅当$\sigma \times \mathrm{pr}_2 : P \times G \to P \times_B P$是同构.

例 12. 考虑S^2的$GL(2, \mathbb{R})$主丛LS^2，

定理 5.3. 给定G主丛$\pi : P \to B$和G在空间F的左作用，那么存在空间$P \times^G F$使得$P \times^G F \to B$是以F为纤维的纤维丛.

证明. 定义

$$P \times^G F := P \times F / \sim,$$

其中等价关系定义为$(x \cdot g, y) \sim (x, g \cdot y)$.于是，映射$p : P \times^G F \to B$定义为

$$(x, y) \mapsto \pi(x),$$

注意到这是个良定义，因为若$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$，那么存在$g \in G$使得$y_1 = g \cdot y_2$，这样$x_2 = x_1 \cdot g$，因此二者在同一点的纤维上.

考虑任意$b \in B$，那么对任意$x \in \pi^{-1}(b)$，存在连续映射

$$
\begin{aligned}
F &\to p^{-1}(b) \\
y &\mapsto (x, y)
\end{aligned}
$$

和它的逆映射

$$
\begin{aligned}
F &\to p^{-1}(b) \\
y &\mapsto (x, y)
\end{aligned}
$$

最后来证明局部平凡化. □

定理**??**中的构造$P \times^G F$被称为Borel构造(Borel construction).

例 13. 任意给定底空间B和G主丛$P \to B$，考虑G在空间F上的平凡作用，那么直接由定义，

例 14. 设M是给定的n维流形，$LM \to M$是$GL(n, \mathbb{R})$主丛，考虑$GL(n, \mathbb{R})$在$\mathbb{R}^n$上的自然作用，那么

命题 5.4. 任意给定纤维丛$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$并选定$F$的自同构群$\mathrm{Aut}(F)$，那么存在$\mathrm{Aut}(F)$主丛$\pi : P \to B$使得$E \cong P \times^{\mathrm{Aut}(F)} F$.

证明. 任意给定$b \in B$，令

$$P_b := \{\varphi : F \to p^{-1}(b) \mid \varphi\text{是同构}\},$$

那么有自然的$\mathrm{Aut}(F)$在P_b上的作用.于是定义

$$P := \coprod_{b \in B} P_b.$$

□

5.1 分类空间

定义. 给定G主丛$P \to B$，若P是可缩的则称$P \to B$是万有主丛(universal principal bundle).

定理 5.5. 给定纤维丛$E \to B$和连续映射$f_0, f_1 : X \to B$，若$f_0 \simeq f_1$则$f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$.

定理 5.6. 给定拓扑群G，则存在拓扑空间BG满足对任意拓扑空间X，

$$[X, BG] \cong \mathbf{Prin}_G(X),$$

其中$[-,-]$是拓扑空间连续函数的同伦等价类，