

# 同调代数

G.Li



# 目录

<b>第一章 导出函子</b>	<b>7</b>
1.1 上链和正合性 . . . . .	7
1.2 链同伦 . . . . .	12
1.3 映射锥和映射柱 . . . . .	14
1.4 内射消解和投射消解 . . . . .	18
1.5 $\delta$ 函子和导出函子 . . . . .	18
<b>第二章 Tor函子和Ext函子</b>	<b>21</b>
2.1 $R$ 模同调与Tor函子 . . . . .	21
2.2 $R$ 模上同调与Ext函子 . . . . .	22
2.2.1 $R$ 模同调与上同调的转换 . . . . .	22
2.3 特殊链复形和万有系数定理 . . . . .	22
2.3.1 特殊链复形 . . . . .	22
2.3.2 万有系数定理 . . . . .	24
2.3.3 零调模型 . . . . .	26
2.4 双复形和链复形中的乘法对象 . . . . .	26
2.4.1 双复形和全复形 . . . . .	26
2.4.2 复形中的乘法对象 . . . . .	33
2.4.3 同调与上同调 . . . . .	36
2.5 一个例子: . . . . .	38
<b>第三章 谱序列</b>	<b>41</b>
3.1 正合对和导出正合对 . . . . .	41
3.2 滤子和收敛性 . . . . .	43
3.2.1 滤子和谱序列 . . . . .	43
3.2.2 收敛性 . . . . .	47
3.3 全复形的上同调 . . . . .	49
3.4 Cartan-Eilenberg预解 . . . . .	52
3.5 Künneth谱序列 . . . . .	53
3.6 Grothendieck谱序列 . . . . .	53

<b>第四章 导出范畴</b>	<b>55</b>
4.1 范畴的局部化 . . . . .	55
4.2 同伦范畴与导出范畴 . . . . .	59
4.3 三角范畴 . . . . .	61
4.3.1 同伦范畴 . . . . .	63
4.3.2 导出范畴 . . . . .	63
4.3.3 生成元 . . . . .	63
4.4 导出函子 . . . . .	64
4.5 例子 . . . . .	66
<b>第五章 层及其上同调</b>	<b>67</b>
5.1 层的基本理论 . . . . .	67
5.1.1 预层与层的基本性质 . . . . .	67
5.1.2 层化 . . . . .	72
5.1.3 底空间变换 . . . . .	75
5.1.4 层范畴及其中的正合性 . . . . .	77
5.2 Cech上同调 . . . . .	78
<b>第六章 群的同调代数</b>	<b>81</b>
6.1 群的同调和上同调 . . . . .	81
<b>第七章 其他类型的同调</b>	<b>85</b>
7.1 超上同调 . . . . .	85
7.2 Lie . . . . .	85
7.3 Hochschild . . . . .	86
7.3.1 Cohomology . . . . .	91
7.3.2 Hochschild-Kostant-Rosenberg . . . . .	92
7.4 循环上同调* . . . . .	92
7.4.1 Brylinski混合复形 . . . . .	94
7.5 应用：形变与上同调 . . . . .	94
7.5.1 一阶形变 . . . . .	94
7.5.2 高阶形变和 . . . . .	97
7.6 函子上同调* . . . . .	99
<b>附录 A Abel范畴</b>	<b>105</b>
A.1 Abel范畴 . . . . .	105
A.1.1 加性范畴 . . . . .	107
A.1.2 Abel范畴及其中态射的分解 . . . . .	110
A.1.3 例子 . . . . .	117
A.1.4 正合性 . . . . .	117
A.1.5 Abel范畴中对象的元素和态射 . . . . .	122

A.1.6 Abel范畴中的特殊对象 . . . . .	127
A.2 Abel范畴间函子 . . . . .	128
A.2.1 Serre subcategory . . . . .	129
A.3 嵌入定理 . . . . .	129
附录 B $A_\infty$	131



# 第一章 导出函子

## 1.1 上链和正合性

**定义.** 给定加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的一族对象及态射构成的图

$$X^\bullet : \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots,$$

满足 $d^n \circ d^{n-1} = 0$ 对任意 $n$ 都成立，则称 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个上链(cochain).

有时为强调，我们也记 $(X^\bullet, d^\bullet)_{\mathbb{Z}}$ . 若 $X^i = 0$ 对任意 $i < 0$ 都成立，则记为 $(X^\bullet, d^\bullet)_{\geq 0}$ ，称复形 $X^\bullet$ 是正阶数的().

**定义.** 给定加性范畴 $\mathcal{A}$ 中上链 $(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ ，一族 $\mathcal{A}$ 中的态射 $\{f^n : X^n \rightarrow Y^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ，满足

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n,$$

即图

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \end{array}$$

是交换的，则称这族态射是上链态射(morphism)，记为 $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ .

$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$

**引理 1.1.** 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ ，则  $\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$  也是 Abel 范畴.

证明. 我们一步步完成验证：

1. 核和余核：给定上链间的态射 $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ，定义

□

**定义.** 设 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的上链, 满足 $X^n = 0$ 对所有的 $n < 0$ 都成立. 若有 $\eta : A \rightarrow X_0$ 使得 $d^0 \circ \eta = 0$ , 则称 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是增广的(augmented). 若还有 $H^n(X^\bullet) = 0$ 对所有的 $n > 0$ 都成立, 且 $\eta$ 诱导了同构 $A \cong H^0(X^\bullet)$ , 则称 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $A$ 的消解(resolution).

对偶地, 我们也有加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的链(chain)的概念. 我们记

**例 1.1.** 给定代数 $R$ , 若 $M$ 是 $R$ 模, 且 $P^\bullet$ 和 $I^\bullet$ 分别是 $M$ 的投射消解和内射消解, 则如下三个横向的序列是 $R$ –**Mod**中的一个上链

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^0} & P^0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots, \end{array}$$

且他们有相同的上同调.

**例 1.2.** 设 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个上链, 定义上链 $\tilde{\tau}^{\leq n}(X^\bullet, d^\bullet)$ 为

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{0} 0 \rightarrow \cdots,$$

此时,

$$H^i(\tilde{\tau}^{\leq n}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^i(X^\bullet) & i < n \\ X^n / \text{Im } d^{n-1} & i = n \\ 0 & i > n. \end{cases}$$

对偶地有构造 $\tilde{\tau}_{\geq n}(X^\bullet, d^\bullet)$ ,

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} X^{n+2} \rightarrow \cdots,$$

且

$$H^i(\tilde{\tau}_{\geq n}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^i(X^\bullet) & i > n \\ \text{Ker } d^{n+1} & i = n \\ 0 & i < n. \end{cases}$$

**例 1.3.** 设 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个上链, 给定整数 $n$ , 定义上链 $\tau^{\leq n}(X^\bullet, d^\bullet)$ 为

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \text{Ker } d^n \xrightarrow{0} 0 \rightarrow \cdots,$$

那么我们可以证明,

$$H^i(\tau^{\leq n}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^i(X^\bullet) & i \leq n \\ 0 & i > n \end{cases},$$

类似地我们也有构造 $\tau_{\geq n}(X^\bullet, d^\bullet)$ ,

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow X^n / \text{Im } d^{n-1} \xrightarrow{\bar{d}^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} X^{n+2} \rightarrow \cdots,$$

对比例**1.2**,

例 1.4. 给定交换环  $R$  和 (可能非交换的)  $R$  代数  $A$ ,  $M$  是  $A$  双模, 那么可以定义 Chevalley-Eilenberg 映射

$$\begin{aligned}\delta_n : M \otimes_R \bigwedge_{i=1}^n A &\rightarrow M \otimes_R \bigwedge_{i=1}^{n-1} A \\ m \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^i [m, a_i] \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_n \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} m \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge \hat{a}_j \wedge \cdots \wedge a_n,\end{aligned}$$

我们来验证这给出一个  $R$  模链复形.

事实上, Chevalley-Eilenberg 同调只依赖于  $A$  的 Lie 代数结构和  $M$  的 Lie 代数模结构

**定义.** 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中上链  $(X^\bullet, d^\bullet)$ , .

**定理 1.1.** 设

$$0 \rightarrow X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \rightarrow 0$$

是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中上链的正合列, 那么存在上同调的长正合列

$$\cdots \rightarrow H^n(X^\bullet) \rightarrow H^n(Y^\bullet) \rightarrow H^n(Z^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(X^\bullet) \rightarrow \cdots.$$

链复形也有完全对偶的同调版本, 表述与证明几乎是完全等同的, 在此

证明. 我们将长正合序列具体写出来

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker d_X^n & \longrightarrow & \ker d_Y^n & \longrightarrow & \ker d_Z^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & Y^n & \longrightarrow & Z^n \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow & Y^{n+1} & \longrightarrow & Z^{n+1} \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{coker } d_X^n & \longrightarrow & \text{coker } d_Y^n & \longrightarrow & \text{coker } d_Z^n & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

于是存在如下交换图, 且横向序列由蛇形引理都是正合的:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{coker } d_X^{n-1} & \longrightarrow & \text{coker } d_Y^{n-1} & \longrightarrow & \text{coker } d_Z^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \bar{d}_X^n & & \downarrow \bar{d}_Y^n & & \downarrow \bar{d}_Z^n & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker d_X^{n+1} & \longrightarrow & \ker d_Y^{n+1} & \longrightarrow & \ker d_Z^{n+1}, \end{array}$$

其中  $\bar{d}_X^n : \text{coker } d_X^{n-1} \rightarrow \ker d_X^{n+1}$  是下图 (习题 A.4)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \ker d_X^{n+1} & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 X^{n-1} & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow & X^{n+2} \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \\
 & & \text{coker } d_X^{n-1} & & & &
 \end{array}$$

由  $d_X^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$  诱导的  $\text{coker } d_X^{n-1} \rightarrow \ker d_X^{n+1}$  (在  $R$  模的情形就是选取一个代表元素  $X^n / \text{im } d_X^{n-1} \cong \text{coker } d_X^{n-1}$ , 然后用  $d_X^n$  将代表元映到  $\ker d_X^{n+1}$  中). 再次根据蛇形引理, 有长正合序列

$$\ker \bar{d}_X^n \rightarrow \ker \bar{d}_Y^n \rightarrow \ker \bar{d}_Z^n \rightarrow \text{coker } \bar{d}_X^n \rightarrow \text{coker } \bar{d}_Y^n \rightarrow \text{coker } \bar{d}_Z^n.$$

但是, 分解

$$X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} = X^n \rightarrow \text{coker } d_X^{n-1} \xrightarrow{\bar{d}_X^n} \ker d_X^{n+1} \hookrightarrow X^{n+1}$$

说明  $\ker \bar{d}_X^n = \ker(\text{coker } d_X^{n-1} \xrightarrow{\bar{d}_X^n} \ker d_X^{n+1} \hookrightarrow X^{n+1})$ , 根据定义

$$\ker \bar{d}_X^n = H^n(X^\bullet),$$

对偶地

$$\text{coker } \bar{d}_X^n = H^{n+1}(X^\bullet),$$

这样就得到了希望的长正合序列.  $\square$

在蛇形引理的证明中, 态射  $\ker \bar{d}_Z^n \rightarrow \text{coker } \bar{d}_X^n$  是困难的, 并且在长正合序列中它对应了阶数提升的态射  $H^n(Z^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(X^\bullet)$ . 这里有必要将整个态射详细清楚地描述出来. 定理 A.13 的证明中详细描述了一般的构造, 特别地, 当  $\mathcal{A}$  是  $R$  模复形时,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{coker } d_X^{n-1} & \longrightarrow & \text{coker } d_Y^{n-1} & \longrightarrow & \text{coker } d_Z^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \bar{d}_X^n & & \downarrow \bar{d}_Y^n & & \downarrow \bar{d}_Z^n & & \\
 0 & \longrightarrow & \ker d_X^{n+1} & \longrightarrow & \ker d_Y^{n+1} & \longrightarrow & \ker d_Z^{n+1}
 \end{array}$$

对应的连接同态是明确的: 任取  $\ker \bar{d}_Z^n$  中的元素  $\bar{z} \in \text{coker } d_Z^n$ , 根据  $\bar{g}$  是满射, 存在  $\bar{y} \in \text{coker } d_Y^n$  使得它在  $\bar{g}$  下的像是  $\bar{z}$ , 根据证明中的说明,  $\bar{d}_Y^n(\bar{y})$  是将  $d_Y^n$  作用在  $\bar{y}$  的任意代表元上得到  $\ker d_Y^{n+1}$  中的元素, 根据右侧的交换性存在  $x \in \ker d_X^{n+1}$  使得  $f^{n+1}|_{\ker d_X^{n+1}}(x) = \bar{d}_Y^n(\bar{y})$ , 于是

$$\delta : H^n(Z^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(X^\bullet)$$

将  $H^n(Z^\bullet)$  中以  $\bar{z}$  代表的元素映到  $H^{n+1}(X^\bullet)$  中  $x$  代表的元素, 满足

$$f^{n+1}|_{\ker d_X^{n+1}}(x) = \bar{d}_Y^n(\bar{y}).$$

换句话说,  $\delta^n$  的行为基本同于  $\bar{d}_Y^n$ .

**定义.** (quasi-isomorphism)

例 1.5. 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的短正合序列

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

那么

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

都是拟同构.

习题 1.1. 给定一族 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的对象  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  和态射

$$d_i^{[n]} : X_n \rightarrow X_{n-1}, 0 \leq i \leq n$$

满足单纯条件

$$d_i^{[n-1]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n-1]} d_i^{[n]}$$

对  $0 \leq i < j \leq n$  成立, 则称  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是预单纯的 (pre-simplicial), 且  $d_i^{[n]}$  是面映射 (face maps). 求证

### 1. 定义

$$\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^{[n]}$$

满足  $\partial_{n-1} \partial_n = 0$ , 于是一个预单纯的 对象  $\{X_n, d_i^{X,[n]}\}_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n}$  给出一个链复形.

2. 给定  $\mathcal{A}$  中的预单纯的 对象  $\{X_n, d_i^{X,[n]}\}_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n}$ ,  $\{Y_n, d_i^{Y,[n]}\}_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n}$ ,  $\{f_n : X_n \rightarrow Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是  $\mathcal{A}$  中的一族态射, 满足

$$f_{n-1} d_i^{X,[n]} = d_i^{Y,[n]} f_n,$$

则  $f$  给出了链复形之间的态射. 称这样一族态射为预单纯的 态射 (pre-simplicial morphism).

证明. 1. 按定义,

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\partial_n &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i^{[n-1]} \right) \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j d_j^{[n]} \right) \\
&= \sum_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, n}} (-1)^{i+j} d_i^{[n-1]} d_j^{[n]} \\
&= \sum_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, n \\ i < j}} (-1)^{i+j} d_i^{[n-1]} d_j^{[n]} + \sum_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, n \\ i \geq j}} (-1)^{i+j} d_i^{[n-1]} d_j^{[n]} \\
&= \sum_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, n \\ i < j}} (-1)^{i+j} d_{j-1}^{[n-1]} d_i^{[n]} + \sum_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, n \\ i \geq j}} (-1)^{i+j} d_i^{[n-1]} d_j^{[n]} \quad \text{单纯条件} \\
&= \sum_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ j-1=0, \dots, n-1 \\ j-1 \geq i}} (-1)^{i+(j-1)+1} d_{j-1}^{[n-1]} d_i^{[n]} + \sum_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, n \\ i \geq j}} (-1)^{i+j} d_i^{[n-1]} d_j^{[n]} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. 直接验证

$$f_{n-1}\partial_n^X = f_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^{X,[n]} \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f_{n-1} d_i^{X,[n]} = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^{Y,[n]} f_n = \partial_n^Y f_n.$$

□

习题 1.2 (Hopf迹定理). 设  $V^\bullet, W^\bullet$  是域  $k$  上有界 ( $\exists N > 0$  使得当  $|n| > N$  时  $V^n = 0$ ) 上链, 且对任意  $n$ ,  $V^n$  和  $W^n$  都是有限维  $k$  向量空间,  $f : V^\bullet \rightarrow W^\bullet$  是链同态,  $f_* : H^n(V^\bullet) \rightarrow H^n(W^\bullet)$  是诱导的上同调群同态. 求证

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \text{Tr } f^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \text{Tr } f_*^n.$$

[归纳地构造向量空间合适的基.]

## 1.2 链同伦

另一方面, 我们希望从拓扑的角度解释这样称呼他们的原因, 设  $f : X \rightarrow Y$  是拓扑空间的连续函数, 那么  $f$  的映射柱是拓扑空间  $(X \times I) \coprod_f Y$ , 其中粘合依赖于  $f : X \times \{1\} \rightarrow Y$ , 它在同伦的定义中起到了重要的作用. 回顾拓扑中映射  $f, g$  的一个同伦是一个连续映射  $H : X \times I \rightarrow Y$ , 满足  $H|_{X \times \{0\}} = f$  且  $H|_{X \times \{1\}} = g$ , 用交换图表表示即为

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{i} & X \times I & \xleftarrow{j} & X \\
& \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\
& Y & & Y &
\end{array},$$

其中  $i : X \rightarrow X \times I, x \mapsto (x, 0)$  且  $j : X \rightarrow X \times I, x \mapsto (x, 1)$ . 用到拓扑空间中余积是不交并的事实, 上图又可以表示为

$$\begin{array}{ccc} X \coprod X & \xrightarrow{i \coprod j} & X \times I \\ & \searrow f \coprod g & \downarrow H \\ & & Y, \end{array}$$

注意到 $X \times I$ 恰是 $\text{id}_X : X \rightarrow X$ 的映射柱，因而映射同伦的存在性恰由映射柱描述。这样的事情同样发生在 $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 中，一个上链映射的同伦 $s : f \simeq g$ 可以给出一个 $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 的交换图

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet \oplus X^\bullet & \longrightarrow & \text{Cyl}(\text{id}_X)^\bullet \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Y^\bullet, \end{array}$$

习题-将给出验证。

**引理 1.2.** 任意给定加性函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ，那么 $F$ 将 $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的同伦链映为同伦链。

**习题 1.3.** 习题1.1中给了预单纯复形的定义。假定 $\{X_n, d_i^{X,[n]}\}_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n}$ ,  $\{Y_n, d_i^{Y,[n]}\}_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n}$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的预单纯链复形，且态射 $h_i^{[n]} : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ 满足关系

$$\begin{aligned} d_i^{[n+1]} h_j^{[n]} &= h_{j-1}^{[n-1]} d_i^{[n]}, & \forall i < j \\ d_i^{[n+1]} h_i^{[n]} &= d_i^{[n+1]} h_{i-1}^{[n]}, & i = j \text{ 或 } i = j + 1 \\ d_i^{[n+1]} h_j^{[n]} &= h_j^{[n-1]} d_{i-1}^{[n]}, & \forall i > j + 1, \\ d_0 h_0 &= f, d_{n+1} h_n &= g. \end{aligned}$$

求证 $h := \sum_{i=0}^n (-1)^i h^i$ 给出了链同伦。

证明。 □

**习题 1.4.** 1. 习题1.2给出了对于有限复形的迹，求证迹映射是加性的，即若有上链短正合列间的态射

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet \longrightarrow 0, \end{array}$$

则 $\text{Tr } g = \text{Tr } f + \text{Tr } h$ 。

2. 接下来的部分考虑若给出的 $f, g$ 和 $h$ 不再是链同态时（此时它们同伦交换），迹不再是加性的。<sup>1</sup>

- (a) 设 $R$ 是包含平方为零元素 $e$ 的（含幺）环，即 $e \neq 0, e^2 = 0$ 。构造 $X^\bullet = R[1], Z^\bullet = R[0]$ ，即 $X, Z$ 是分别集中于1, 0阶的1维自由 $R$ 模； $Y^0 = Y^1 = R$ ,  $d^0 = e$ ，且其余 $Y$ 的项都为0。这样

$$\begin{array}{ccc} R & \rightrightarrows & R \\ & \downarrow e & \\ R & \rightrightarrows & R \end{array}$$

<sup>1</sup>这个反例取自[1]。

给出了短正合列

$$0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow 0.$$

求证  $f = 0, h = 0$  且  $g = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} : Y \rightarrow Y$  给出了同伦交换的图

$$\begin{array}{ccccc}
 & R & \xlongequal{\quad} & R & \\
 & \downarrow e & & & \\
 R & \xlongequal{\quad} & R & \xrightarrow{0} & R \\
 & \searrow & \nearrow & & \searrow \\
 & & R & \xrightarrow{e} & R \\
 & & \downarrow e & & \\
 & & R & \xlongequal{\quad} & R \\
 & & \searrow & & \\
 & & R & \xlongequal{\quad} & R
 \end{array}$$

(b) 求证  $\text{Tr } g = -e$ , 且  $\text{Tr } f = \text{Tr } h = 0$ .

### 1.3 映射锥和映射柱

给定Abel范畴  $\mathcal{A}$ , 且设  $X^\bullet = (X^n, d_X^n) \in \text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$  是  $\mathcal{A}$  中对象组成的复形, 那么我们可以定义一个新的复形  $X[n]^\bullet$ , 满足  $(X[n])^i = X^{n+i}$ ,  $d_{X[n]}^i = (-1)^n d_X^{n+i} : (X[n])^i \rightarrow (X[n])^{i+1}$ . 若  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  是一个链同态, 则我们有诱导的链同态  $f[n] : X[n]^\bullet \rightarrow Y[n]^\bullet$ , 满足  $f[n]^i = f^{n+i} : (X[n])^i \rightarrow (Y[n])^i$ .

我们称[1]为平移函子(translational by 1 functor), 它是拓扑中  $- \times [0, 1]$  的类比. 之后这个函子将给出了????上的一个三角结构(triangulated structure).

对偶地,

**定义.** 给定Abel范畴  $\mathcal{A}$  的一个链同态  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ , 那么  $f$  的映射锥(mapping cone)是  $\mathcal{A}$  中对象组成的一个链  $\text{Cone}(f)^\bullet$  满足

$$\text{Cone}(f)^i := X[1]^i \oplus Y^i$$

和

$$d_{\text{Cone}(f)}^i := \begin{pmatrix} d_{X[1]}^i & 0 \\ f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix} : \begin{array}{c} X^{n+1} \longrightarrow X^{n+2} \\ \oplus \qquad \qquad \qquad \oplus \\ \swarrow \qquad \qquad \qquad \searrow \\ Y^n \longrightarrow Y^{n+1}, \end{array}$$

类似地我们可以定义  $f$  的映射柱(mapping cylinder), 它是  $\mathcal{A}$  中对象组成的一个链  $\text{Cyl}(f)^\bullet := X^\bullet \oplus X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$ , 其中

$$d_{\text{Cyl}(f)}^i := \begin{pmatrix} d_X^i & -\text{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d_{X[1]}^i & 0 \\ 0 & f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix}.$$

这样微分映射的定义很明显是合理的，它们都是上链：

$$d_{\text{Cone}(f)}^{i+1} \circ d_{\text{Cone}(f)}^i = \begin{pmatrix} d_{X[1]}^{i+1} & 0 \\ f[1]^{i+1} & d_Y^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^i & 0 \\ f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{X[1]}^{i+1} \circ d_{X[1]}^i & 0 \\ f[1]^{i+1} \circ d_{X[1]}^i + d_Y^{i+1} \circ f[1]^i & d_Y^{i+1} \circ d_{X[1]}^i \end{pmatrix} = 0,$$

且

$$d_{\text{Cyl}(f)}^{i+1} \circ d_{\text{Cyl}(f)}^i = \begin{pmatrix} d_X^{i+1} & -\text{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d_{X[1]}^{i+1} & 0 \\ 0 & f[1]^{i+1} & d_Y^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^i & -\text{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d_{X[1]}^i & 0 \\ 0 & f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix}$$

例 1.6. 设  $X^\bullet, Y^\bullet$  是单对象上链， $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  是链映射，那么由定义

$$\text{Cone}(f) = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow X^0 \xrightarrow{f} Y^0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

其中  $Y^0$  所在的位置是 0 阶位置，且有  $H^0 = \text{coker } f, H^{-1} = \ker f$ . 这意味着我们可以将 Cone 可以视作 ker 和 coker 的推广，这在后面三角范畴的讨论中是关键的问题.

对偶地，

**引理 1.3.** Abel 范畴  $\mathcal{A}$  的一个链同态  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  诱导了同构  $f^* : H^*(X^\bullet) \rightarrow H^*(Y^\bullet)$  当且仅当  $H^*(\text{Cone}(f)) = 0$ .

证明. 如下短正合列

$$0 \rightarrow Y^\bullet \xrightarrow{i} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p} X[1]^\bullet \rightarrow 0$$

(其中  $i$  是嵌入  $p$  是投影) 诱导了上同调群的长正合列

$$\cdots \rightarrow H^n(\text{Cone}(f)) \rightarrow H^n(X[1]) \rightarrow H^{n+1}(Y) \rightarrow H^{n+1}(\text{Cone}(f)) \rightarrow \cdots,$$

于是  $H^n(X[1]) = H^{n+1}(X) \cong H^{n+1}(X)$  当且仅当  $H^n(\text{Cone}(f)) = 0$  对所有  $n$  成立，于是只要说明诱导长正合序列的连接态射是由  $f$  诱导的即可. 考虑?????  $\square$

**命题 1.2.** 设 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  的一个链同态  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  满足  $\text{Cone}(f) \simeq 0$ ，那么  $f$  是链同伦等价.

证明. 令  $i : Y^\bullet \rightarrow \text{Cone}(f)$  是嵌入  $p : \text{Cone}(f) \rightarrow X[1]^\bullet$  是投影.

首先， $i \simeq 0$  当且仅当  $f$  有右同伦逆，即存在链映射  $g : Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$  使得  $fg \simeq \text{id}_{Y^\bullet}$ . 一方面，若  $i \simeq 0$ ，那么存在  $h : Y^\bullet \rightarrow \text{Cone}(f)[-1]$  满足

$$d_{\text{Cone}(f)}^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_Y^n = i,$$

按照直和分解  $\text{Cone}(f) := X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$ ，存在  $s : Y^\bullet \rightarrow Y[-1]^\bullet$  和  $g : Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$  满足  $h = s + g$ ，于是上式可以写为

$$\begin{pmatrix} d_{X[1]}^{n-1} & 0 \\ f[1]^{n-1} & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^n \\ s^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^{n+1} \\ s^{n+1} \end{pmatrix} d_Y^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_Y \end{pmatrix}.$$

这意味着  $g : Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$  是链映射，且

$$f[1]^{n-1} \circ g^n + d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_Y^n = \text{id}_Y,$$

即  $g$  是右同伦逆。另一方面， $f$  有右同伦逆，记为链映射  $g : Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$  和  $s : Y^\bullet \rightarrow Y[-1]^\bullet$ ，那么之前证明中的矩阵等式成立，于是找到了  $h := s + g$  满足  $d_{\text{Cone}(f)}^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_Y^n = i$ ，即  $i \simeq 0$ 。

再来， $p \simeq 0$  当且仅当  $f$  有左同伦逆，即存在链映射  $h : Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$  使得  $hf \simeq \text{id}_{Y^\bullet}$ 。

最后，我们回到命题的证明来。 $\text{Cone}(f) \simeq 0$  意味着  $\text{id}_{\text{Cone}(f)} \simeq 0$ ，于是  $i = \text{id}_{\text{Cone}(f)} \circ i \simeq 0 \circ i = 0$  并且  $p = p \circ \text{id}_{\text{Cone}(f)} \simeq p \circ 0 = 0$ ，于是根据前面的讨论， $f$  同时有左右同伦逆，因此  $f$  是同伦等价。□

拓扑上，考虑

**定理 1.3.** 任给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  的一个链同态  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ，都存在如下  $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$  的正合列：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y^\bullet & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \text{Cone}(f) & \xrightarrow{\pi} & X^\bullet[1] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Cyl}(f) & \xrightarrow{\pi} & \text{Cone}(f) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \beta & & \\ & & X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & & \end{array}$$

**推论 1.3.1.**

**定义.** 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$ ，称  $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$  中的图

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{h} X^\bullet[1]$$

为其中的一个三角(triangle)，三角间的态射(morphism)是如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet & \xrightarrow{h} & X^\bullet[1] \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] \\ K^\bullet & \xrightarrow{i} & L^\bullet & \xrightarrow{j} & M^\bullet & \xrightarrow{k} & K^\bullet[1] \end{array}$$

给定三角，若存在  $f$  使得三角同构于

$$X^\bullet \xrightarrow{f} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} \text{Cone}(f) \xrightarrow{\delta} X^\bullet[1]$$

则称它是特异三角(distinguished triangle)。

如上定义给出的是

$$\begin{array}{ccccc} X^\bullet & \xleftarrow{w} & Z^\bullet \\ u \searrow & & \swarrow v \\ & Y^\bullet, & \end{array}$$

其中  $w$

**命题 1.4.**  $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$  中的任意短正合序列  $0 \rightarrow X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \rightarrow 0$  都拟同构于某个特异三角.

证明. 考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet & \xrightarrow{h} 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & \\ 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{f} & \text{Cyl}(f) & \xrightarrow{\pi} & \text{Cone}(f) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

□

习题 1.5. 设  $(X^\bullet \oplus Y^\bullet, d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix})$  是上链复形,  $(Y^\bullet, \delta^\bullet)$  可缩上链复形且  $h : Y^\bullet \rightarrow Y^\bullet[-1]$  是链同伦, 求证

$$(\text{id}, -h\gamma) : (X^\bullet, \alpha - \beta h\gamma) \hookrightarrow (X^\bullet \oplus Y^\bullet, d)$$

是拟同构. 这个练习说明消去可缩子复形不影响上同调.

证明. 首先来验证  $(X^\bullet, \alpha - \beta h\gamma)$  是链复形. 由于

$$d^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix} = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta h\gamma)^2 &= \alpha^2 - \alpha\beta h\gamma - \beta h\gamma\alpha + (\beta h\gamma)^2 \\ &= \alpha^2 + \beta\delta h\gamma + \beta h\delta\gamma + \beta h\gamma\beta h\gamma \\ &= \alpha^2 + \beta(h\delta + \delta h)\gamma + \beta h\delta^2 h\gamma, \end{aligned}$$

由于  $\delta$  是微分映射且  $h : \text{id} \simeq 0$  是收缩同伦, 故如上计算  $(\alpha - \beta h\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ .

再来验证  $(\text{id}, -h\gamma)$  是链映射, 这等价于图

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{\alpha^n - \beta^{n+1}\gamma^n} & X^{n+1} \\ \left( \begin{array}{c} \text{id} \\ -h^{n+1}\gamma^n \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow \left( \begin{array}{c} \text{id} \\ -h^{n+2}\gamma^{n+1} \end{array} \right) \\ X^n \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^n & \beta^n \\ \gamma^n & \delta^n \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \end{array}$$

是交换的.注意到

$$\begin{pmatrix} \alpha^n & \beta^n \\ \gamma^n & \delta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} \\ -h^{n+1}\gamma^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n h^{n+1}\gamma^n \\ \gamma^n - \delta^n h^{n+1}\gamma^n \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix} \text{id} \\ -h^{n+2}\gamma^{n+1} \end{pmatrix} (\alpha^n - \beta^n h^{n+1}\gamma^n) = \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n h^{n+1}\gamma^n \\ -h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n + h^{n+2}\gamma^{n+1}\beta^n h^{n+1}\gamma^n \end{pmatrix}.$$

根据 $d^2 = 0$ ,  $\gamma^{n+1}\beta^n = -\delta^{n+1}\delta^n = 0$ , 于是

$$-h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n + h^{n+2}\gamma^{n+1}\beta^n h^{n+1}\gamma^n = -h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n.$$

又由于 $\gamma^{n+1}\alpha^n = -\delta^{n+1}\gamma^n$ ,

$$\begin{aligned} \delta^n h^{n+1}\gamma^n - h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n &= \delta^n h^{n+1}\gamma^n + h^{n+2}\delta^{n+1}\gamma^n \\ &= (\delta^n h^{n+1} + h^{n+2}\delta^{n+1})\gamma^n \\ &= \gamma^n, \end{aligned}$$

这就证明了图的交换性.

最后, 嵌入映射

$$(\text{id}, -h\gamma) : (X^\bullet, \alpha - \beta h\gamma) \hookrightarrow (X^\bullet \oplus Y^\bullet, d)$$

的余核( $Y^\bullet, \delta$ )是零调的, 因此长正合序列说明了嵌入是拟同构.  $\square$

## 1.4 内射消解和投射消解

**定义.** (augmented )

## 1.5 $\delta$ 函子和导出函子

**定义.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 的(协变)上同调 $\delta$ 函子( $\delta$ -functor)是一族函子 $\{T^i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\}_{i \in \mathbb{N}}$ , 和对任意 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

都有态射 $\delta_{Z,X}^i : T^i(Z) \rightarrow T^{i+1}(X)$ , 满足

1. 对任意给定的 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ , 都存在长正合列
2. 若有 $\mathcal{A}$ 中的短正合列交换图那么态射 $\delta_{Z,X}^i$ 给出了自然的交换图

$$\begin{array}{ccc} T^i(Z_1) & \xrightarrow{\delta_{Z_1,X_1}^i} & T^{i+1}(X_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(Z_2) & \xrightarrow{\delta_{Z_2,X_2}^i} & T^{i+1}(X_2). \end{array}$$

对偶地，(协变)上同调 $\delta$ 函子( $\delta$ -functor)是一族函子 $\{T_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\}_{i \in \mathbb{N}}$ ，和对任意 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

都有态射 $\delta_i^{Z,X} : T_i(Z) \rightarrow T_{i-1}(X)$ ，满足

1. 对任意给定的 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ ，都存在长正合列
2. 若有 $\mathcal{A}$ 中的短正合列交换图那么态射 $\delta_i^{Z,X}$ 给出了自然的交换图

$$\begin{array}{ccc} T_i(Z_1) & \xrightarrow{\delta_i^{Z_1,X_1}} & T_{i-1}(X_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_i(Z_2) & \xrightarrow{\delta_i^{Z_2,X_2}} & T_{i-1}(X_2). \end{array}$$

其中的态射族 $\delta$ 统称为链接态射(connecting morphism).

在定义的记号中，链接态射关于的肩标(脚标)只记录了短正合列的第一和第三项，但实际它与整个短正合列都相关，并且相关性是自然的。严格的表述如下：

习题 1.6.

**定义.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 和加性函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ，若对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 $X$ ，都存在单态射 $i : X \rightarrow I$ 使得 $F(i) = 0$ ，则称 $F$ 是effecable的。对偶地，若对于任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 $Z$ ，都存在单态射 $p : P \rightarrow Z$ 使得 $F(p) = 0$ ，则称 $F$ 是coeffecable的。

**定理 1.5.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 和 $\delta$ 函子 $(T^i, \delta)_{i \in \mathbb{N}}$ ，若对于任意 $i > 0$ ， $T^i$ 都是有效的函子，那么 $(T^i, \delta)_{i \in \mathbb{N}}$ 在所有 $\delta$ 函子中是始对象，即

证明.

□

**推论 1.5.1.** 右导出函子是有效的，反之也成立。



## 第二章 Tor函子和Ext函子

### 2.1 R模同调与Tor函子

**引理 2.1.** 给定环同态  $\varphi: R \rightarrow S$ ,  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$  是  $S$  右模复形, 那么存在自然的  $R$  右模同构

$$H_n(\tilde{C}_\bullet) \cong \tilde{H}_n(C_\bullet),$$

其中  $\tilde{C}_\bullet$  是将  $S$  模视作  $R$  模得到的复形,  $H_n(\tilde{C}_\bullet)$  是这个对应复形的同调;  $\tilde{H}_n(C_\bullet)$  是先取复形  $C_\bullet$  的同调  $H_n(C_\bullet)$  再将其视为  $R$  模得到的  $R$  右模.

换句话说, 模范畴的复形同调与基环的选取无关.

**定义.** 给定 (右)  $R$  模链复形  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$  和 (左)  $R$  模  $N$ , 则以  $N$  为系数的  $C_\bullet$  的同调 (the homology of  $C_\bullet$  with coefficient in  $N$ ) 为

$$H_n(C_\bullet; N) := H_n(C_\bullet \otimes_R N),$$

其中复形  $C_\bullet \otimes_R N$  是

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \otimes_R N \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes_R N} C_n \otimes_R N \xrightarrow{\partial_n \otimes_R N} C_{n-1} \otimes_R N \rightarrow \cdots.$$

**定理 2.1.**

**推论 2.1.1.** 给定  $R$  模短正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0,$$

满足  $P$  是平坦的, 那么

1.  $M$  是平坦的当且仅当  $N$  是平坦的,
2. 对任意  $R$  模  $Q$ ,  $0 \rightarrow M \otimes_R Q \rightarrow N \otimes_R Q \rightarrow P \otimes_R Q \rightarrow 0$  也是正合列.

## 2.2 $R$ 模上同调与Ext函子

### 2.2.1 $R$ 模同调与上同调的转换

## 2.3 特殊链复形和万有系数定理

### 2.3.1 特殊链复形

**引理 2.2.** 设 $(P_\bullet, \partial_\bullet)$ 是投射 $R$ 模链复形,  $H_n(P_\bullet) = 0$ 对任意 $n$ 成立, 且所有的 $\text{Im } \partial_{n+1}$ 也都是投射的, 则 $P_\bullet \simeq 0$ .

证明. 令 $Z_n := \text{Ker } \partial_n$ ,  $B_n := \text{Im } \partial_{n+1}$ , 那么对所有的整数 $n$ 我们有短正合序列

$$0 \rightarrow Z_n \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \rightarrow 0.$$

根据投射 $R$ 模的提升性质, 存在 $h_{n-1} : B_{n-1} \rightarrow P_n$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & B_{n-1} & & & \\ & & h_{n-1} \swarrow & \parallel & & & \\ 0 \longrightarrow & Z_n \longrightarrow & P_n \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1} \longrightarrow 0. & & & \end{array}$$

因此 $P_n = Z_n \oplus h_{n-1}(B_{n-1})$ . 由于 $H_n(P_\bullet) = 0$ ,  $Z_n = B_n$ , 于是复形可以重写为

$$\cdots \rightarrow Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \xrightarrow{\partial_{n+1}} Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \xrightarrow{\partial_n} Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \rightarrow \cdots,$$

满足 $\partial_n|_{Z_n} = 0$ ,  $\partial_n|_{h_{n-1} Z_{n-1}} = (h_{n-1})^{-1}$ , 于是

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \longrightarrow & Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \xrightarrow{\partial_n} & Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \longrightarrow \cdots & & & \\ \parallel & \swarrow h_{n-1} & \parallel & \swarrow h_{n-2} & \parallel & & \\ \cdots \longrightarrow & Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \longrightarrow & Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \xrightarrow{\partial_n} & Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \longrightarrow \cdots & & & \end{array}$$

给出了链同伦 $\text{id} \simeq 0$ . □

作为推论, 考虑投射 $R$ 模链复形的态射 $f : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ 诱导了同构 $f_* : H_*(M_\bullet) \rightarrow H_*(N_\bullet)$ , 那么 $H_n(\text{Cone}(f)) = 0$ 对任意 $n$ 成立. 但是,  $\text{Cone}(f)$ 也是投射 $R$ 模链复形, 由刚刚的引理 $\text{Cone}(f) \simeq 0$ , 于是根据命题1.2的对偶,  $f$ 是链同伦. 这样我们证明了

**命题 2.2.** 若投射 $R$ 模链复形的态射 $f : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ 诱导了同构 $f_* : H_*(M_\bullet) \rightarrow H_*(N_\bullet)$ , 那么 $f$ 是链同伦.

事实上, 我们还可以证明更强的结论: 如果同调群的同构 $H_*(M_\bullet) \cong H_*(N_\bullet)$ 并不是由特定的态射诱导的话, 给定的自由 $R$ 模链复形 $M_\bullet, N_\bullet$ 依旧依旧是同伦等价的, 即:

**定理 2.3.** 若是 hereditary 且  $(M_\bullet, \partial_\bullet^M), (N_\bullet, \partial_\bullet^N)$  是自由  $R$  模链复形, 那么  $M_\bullet \simeq N_\bullet$  当且仅当  $H_n(M_\bullet) = H_n(N_\bullet)$  对任意  $n$  成立.

为了证明定理 2.3, 我们需要建立由同调群映射到链复形态射的提升, 即

**命题 2.4.** 给定  $R$  模链复形  $M_\bullet, N_\bullet$  且  $M^\bullet$  是投射链复形, 且  $\text{Ker } \partial_n^M, \text{Im } \partial_{n+1}^M$  都是投射的, 则对于任意上同调群的同态  $\varphi_* : H_*(M_\bullet) \rightarrow H_*(N_\bullet)$  都可以找到链复形态射  $f : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ , 使得  $f_* = \varphi_*$ .

证明. 按照假设  $Z_n^M := \text{Ker } \partial_n, B_n^M := \text{Im } \partial_{n+1}$  都是投射的, 于是存在交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B_n^M & \longrightarrow & Z_n^M & \xrightarrow{\pi_n^M} & H_n^M & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow |f_n|_{B_n^M} & & \downarrow \tilde{f}_n & & \downarrow \varphi_n & \\ 0 & \longrightarrow & B_n^N & \longrightarrow & Z_n^N & \xrightarrow{\pi_n^N} & H_n^N & \longrightarrow 0, \end{array}$$

其中上下两行的正合性说明, 对任意  $\partial_{n+1}^M(m) = b \in B_n^M$ ,

$$\pi_n^N \circ \tilde{f}_n(b) = \pi_n^N \circ \tilde{f}_n(\partial_{n+1}(m)) = \varphi_n(\pi_n^M \circ \partial_{n+1}^M(m)) = 0,$$

因此  $\tilde{f}_n(b) \in \text{Ker } \pi_n^N = B_n^N$ , 这样只需要将  $\tilde{f}_n$  扩张到  $M_n$  即可.

考虑 2.2 中的分解  $M_n = Z_n^M \oplus h_{n-1}(B_{n-1}^M)$ , 在如下交换图中

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_n^M & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & B_{n-1}^M & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{f}_n & & \nearrow h_{n-1} & & \parallel & \\ & & & & & & & B_{n-1}^M \\ & & & & \searrow k_{n-1} & & \downarrow |f_n|_{B_{n-1}^M} & \\ 0 & \longrightarrow & Z_n^N & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & B_{n-1}^N & \longrightarrow 0, \end{array}$$

再次根据自由模的投射性质存在  $k_{n-1} : B_{n-1}^M \rightarrow N_n$ . 于是, 定义

$$\begin{aligned} f_n : M_n &\rightarrow N_n \\ (z, h_{n-1}(b)) &\mapsto \tilde{f}_n(z) + k_{n-1}(b), \end{aligned}$$

这样只需要验证  $f$  是链映射且  $f_* = \varphi_*$  即可. 计算得

$$f_n \partial_{n+1}^M((z, h_n(b))) = f_n(b, 0) = \tilde{f}_n(b) = \partial_{n+1}^N \circ k_n(b) = \partial_{n+1}^N(\tilde{f}_{n+1}(z) + k_n(b)) = \partial_{n+1}^N f_{n+1}((z, h_n(b))),$$

于是  $f$  是链映射, 且  $f_*([z]) = [\tilde{f}_n(z)]$ ,  $\tilde{f}_n$  的定义交换图说明  $\varphi_n \circ \pi_n^M = \pi_n^N \circ \tilde{f}_n$ , 这样  $[\tilde{f}_n(z)] = \varphi_n([z])$ , 即  $f_* = \varphi_*$ .  $\square$

结合命题 2.2, 此时定理 2.3 已经完成了证明. 更进一步地, 我们还有

**命题 2.5.** 给定  $R$  模投射链复形  $M_\bullet, N_\bullet$ , 且  $\text{Ker } \partial_n^M, \text{Im } \partial_{n+1}^M, \text{Ker } \partial_n^N, \text{Im } \partial_{n+1}^N$  都是投射的, 若  $H_*(M_\bullet), H_*(N_\bullet)$  也都是投射的, 且态射  $f, g : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  诱导相同的同态  $f_* = g_* : H_*(M_\bullet) \rightarrow H_*(N_\bullet)$ , 那么  $f \simeq g$ .

证明. 令  $Z_n^M := \text{Ker } \partial_n^M, B_n^M := \text{Im } \partial_{n+1}^M, Z_n^N := \text{Ker } \partial_n^N, B_n^N := \text{Im } \partial_{n+1}^N$ , 将  $H_*(M_\bullet)$  看作 (边缘算子为0的) 链复形, 那么显然  $H_*(M_\bullet) = H_*(H_*(M_\bullet))$  (这里固定一个同构视为相等), 根据命题2.4, 存在链映射  $j_\bullet : M_\bullet \rightarrow H_*(M_\bullet)$  使得  $j_*$  是同构  $H_*(M_\bullet) = H_*(H_*(M_\bullet))$ . 根据命题2.2,  $j_\bullet$  存在同伦逆, 记为  $j_\bullet^{-1}$ . 类似地, 存在链映射  $k_\bullet : N_\bullet \rightarrow H_*(N_\bullet)$  使得  $k_*$  是同构  $H_*(N_\bullet) = H_*(H_*(N_\bullet))$ ,  $k_\bullet^{-1}$  是同伦逆. 于是

$$f \simeq (k \circ k^{-1}) \circ f \circ (j \circ j^{-1}) = k \circ (k^{-1} \circ f \circ j) \circ j^{-1}.$$

另一方面, 链复形  $H_*(M_\bullet), H_*(N_\bullet)$  的边缘算子都是0, 链映射  $H_*(M_\bullet) \rightarrow H_*(N_\bullet)$  和它诱导的  $H_*(H_*(M_\bullet)) \rightarrow H_*(H_*(N_\bullet))$  没有差别, 因此

$$k^{-1} \circ f \circ j = (k^{-1} \circ f \circ j)_* = k_*^{-1} \circ f_* \circ j_* = \text{id} \circ f_* \circ \text{id} = f_*,$$

同理  $k^{-1} \circ g \circ j = g_*$ , 综合起来

$$f \simeq k \circ (k^{-1} \circ f \circ j) \circ j^{-1} = k \circ f_* \circ j^{-1} = k \circ g_* \circ j^{-1} = k \circ (k^{-1} \circ g \circ j) \circ j^{-1} \simeq g.$$

□

### 2.3.2 万有系数定理

**定理 2.6.** 给定环  $R$  和平坦右  $R$  模组成的复形  $P_\bullet$ , 使得所有的子模  $\text{Im } \partial_{n+1}$  也都是平坦的, 那么对于任意的左  $R$  模  $N$  和  $n \in \mathbb{Z}$ , 都存在正合序列

$$0 \rightarrow H_n(P_\bullet) \otimes_R N \rightarrow H_n(P_\bullet; N) \rightarrow \text{Tor}_1^R(H_{n-1}(P_\bullet), N) \rightarrow 0,$$

natural.

证明. 首先对任意  $n \in \mathbb{Z}$  存在正合列

$$0 \rightarrow Z_n \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \rightarrow 0,$$

根据推论2.1.1,  $Z_n$  也都是平坦的, 且诱导的

$$0 \rightarrow Z_n \otimes_R N \rightarrow P_n \otimes_R N \rightarrow B_{n-1} \otimes_R N \rightarrow 0$$

也是正合列. 这样, 存在 Abel 群复形的短正合序列

$$0 \rightarrow Z_\bullet \otimes_R N \rightarrow P_\bullet \otimes_R N \rightarrow B[-1]_\bullet \otimes_R N \rightarrow 0,$$

并且诱导了长正合序列

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(B[-1]_{\bullet} \otimes_R N) \xrightarrow{\delta} H_n(Z_{\bullet} \otimes_R N) \rightarrow H_n(P_{\bullet} \otimes_R N) \rightarrow H_n(B[-1]_{\bullet} \otimes_R N) \rightarrow \cdots.$$

注意到  $(Z_{\bullet}, \partial_{\bullet}|_Z)$  和  $(B[-1]_{\bullet}, \partial_{\bullet}|_B)$  的边缘算子都是 0，故  $H_n(Z_{\bullet} \otimes_R N) = Z_n \otimes_R N, H_n(B[-1]_{\bullet} \otimes_R N) = B_{n-1} \otimes_R N$ . 这样，之前的长正合序列是

$$\cdots \rightarrow B_n \otimes_R N \xrightarrow{\delta_n} Z_n \otimes_R N \rightarrow H_n(P_{\bullet} \otimes_R N) \rightarrow B_{n-1} \otimes_R N \rightarrow \cdots,$$

其中，映射  $\delta : B_n \otimes_R N \rightarrow Z_n \otimes_R N$  恰好是嵌入  $i_n : B_n \rightarrow Z_n$  在  $- \otimes_R N$  下的象，这样有正合列

$$0 \rightarrow \text{Coker } \delta_n \rightarrow H_n(P_{\bullet} \otimes_R N) \rightarrow \text{Ker } \delta_{n-1} \rightarrow 0.$$

注意到

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n(P_{\bullet}) \rightarrow 0$$

是  $H_n(P_{\bullet})$  的平坦消解，因此根据 Tor 诱导的长正合序列

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^R(H_n(P_{\bullet}), N) \rightarrow B_n \otimes_R N \xrightarrow{\delta_n} Z_n \otimes_R N \rightarrow H_n(P_{\bullet}) \otimes_R N \rightarrow 0,$$

代入即可. □

对偶地，有上同调的万有系数定理：

**定理 2.7.** 给定环  $R$  和投射右  $R$  模组成的复形  $P_{\bullet}$ ，使得所有的子模  $\text{Im } \partial_{n+1}$  也都是投射的，那么对于任意的左  $R$  模  $N$  和  $n \in \mathbb{Z}$ ，都存在正合序列

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(P_{\bullet}), N) \rightarrow H^n(P_{\bullet}; N) \rightarrow \text{Hom}_R(H_n(P_{\bullet}), N) \rightarrow 0.$$

**引理 2.3.** 给定主理想整环  $R$  和自由  $R$  模  $M$ ，则  $M$  的子模也是自由的.

**定义.** 设  $M^{\bullet}$  是  $R$  模上链复形，若对每一个  $n \in \mathbb{Z}$ ， $M^n$  都是自由  $R$  模，则称  $M^{\bullet}$  是自由链复形(free cochain complex).

**推论 2.7.1.** 若  $P_{\bullet}$  是承袭环  $R$  模的投射链复形，那么存在自然的正合序列

$$0 \rightarrow H_n(P_{\bullet}) \otimes_R N \rightarrow H_n(P_{\bullet}; N) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(P_{\bullet}), N) \rightarrow 0,$$

(非典范的) 分裂. 对偶地，

证明. □

**例 2.1.** 若  $M_{\bullet}$  是主理想整环  $R$  模的自由链复形，给定一个拓扑空间  $X$ ，

### 2.3.3 零调模型

**定理 2.8.** 给定环  $R$  的链复形  $C_\bullet, D_\bullet \in$ , 满足  $C_\bullet$  是自由链复形, 且  $D_\bullet$  是零调的. 设  $\varphi_0 : H_0(C_\bullet) \rightarrow H_0(D_\bullet)$  是同态, 则

1. 存在链同态  $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  使得  $(f_*)_0 = \varphi_0$ ,
2. 任意满足如上性质的链同态都是同伦的.

## 2.4 双复形和链复形中的乘法对象

### 2.4.1 双复形和全复形

**定义.** 分次模/分次对象

**定义.** 设  $M, N$  是分次  $R$  模, 若  $R$  模态射  $f : M \rightarrow N$  满足存在整数  $d$ , 使得对任意  $n \in \mathbb{Z}$  都有  $f : M_n \rightarrow N_{n+k}$ , 则称  $f$  是阶数为  $k$  的分次映射(graded map of degree  $k$ ).

**命题 2.9.** 若  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  分别是阶数为  $k, l$  的分次映射, 则  $g \circ f$  是阶数为  $k + l$  的分次映射.

**定义.** 一个双分次模(bigraded module)是一族有两个指标的  $R$  模

$$M := \{M^{p,q}\}_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}},$$

一般我们记为  $M^{\bullet\bullet}$ . 若  $M, N$  是双分次模, 一族映射

$$f = \{f^{p,q} : M^{p,q} \rightarrow N^{p+k, q+l}\}_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$$

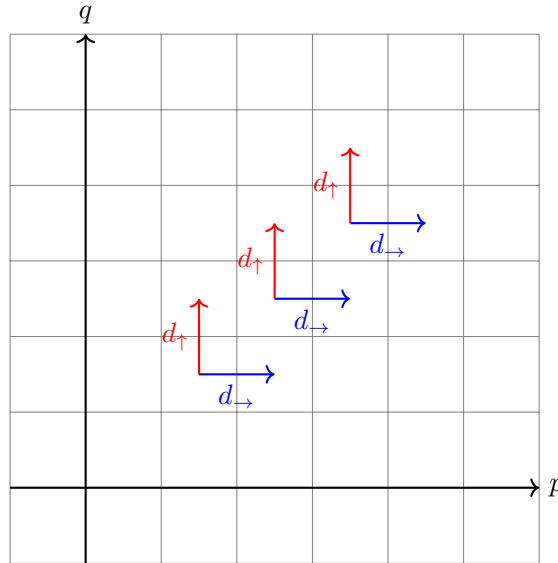
若都是  $R$  模映射, 则称  $f$  是阶数为  $(k, l)$  的双分次映射.

接下来我们都用上同调的序号记号.

**定义.** 设 $M$ 是双分次 $R$ 模,  $d_{\rightarrow}, d_{\uparrow}$ 是两个阶数分别为 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的双分次微分映射 (即 $d_{\rightarrow}^{p+1,q} \circ d_{\rightarrow}^{p,q} = 0$ ,  $d_{\uparrow}^{p,q+1} \circ d_{\uparrow}^{p,q} = 0$ ). 若映射满足

$$d_{\rightarrow}^{p,q+1} \circ d_{\uparrow}^{p,q} = d_{\uparrow}^{p+1,q} \circ d_{\rightarrow}^{p,q},$$

则称 $(M, d_{\rightarrow}, d_{\uparrow})$ 是一个双复形(bicomplex).



**例 2.2.** 设 $M$ 是双分次 $R$ 模,  $d_{\rightarrow}, \delta$ 是两个阶数分别为 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的双分次微分映射, 使得 $d_{\rightarrow}^{p,q+1} \circ \delta^{p,q} + \delta^{p+1,q} \circ d_{\rightarrow}^{p,q} = 0$  (注意这和双复形差了一个符号!), 那么我们可以通过符号变换构造一个双复形. 令 $d_{\uparrow}^{p,q} = (-1)^p \delta^{p,q}$ , 那么

$$d_{\rightarrow}^{p,q+1} \circ d_{\uparrow}^{p,q} = d_{\uparrow}^{p+1,q} \circ d_{\rightarrow}^{p,q}.$$

**定义.** 给定环 $R$ 和 $M^{\bullet} \in \text{Com}^{\bullet}(\mathbf{Mod}-R)$ ,  $N^{\bullet} \in \text{Com}^{\bullet}(R-\mathbf{Mod})$ , 定义 $M^{\bullet} \otimes N^{\bullet}$ 是一个**Ab**上的双复形

$$\begin{aligned} M^{\bullet} \otimes N^{\bullet} &= (M^i \otimes_R N^j, d_{\rightarrow}^{i,j} = d_M^i \otimes_R \text{id}_{N^j} : M^i \otimes_R N^j \rightarrow M^{i+1} \otimes_R N^j \\ &\quad d_{\uparrow}^{i,j} = \text{id}_{M^i} \otimes_R d_N^j : M^i \otimes_R N^j \rightarrow M^i \otimes_R N^{j+1})_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

如下图

$$\begin{array}{ccc} M^i \otimes_R N^{j+1} & \xrightarrow{d_{\rightarrow}^{i+1,j}} & M^{i+1} \otimes_R N^{j+1} \\ d_{\uparrow}^{i,j} \uparrow & & \uparrow d_{\uparrow}^{i,j+1} \\ M^i \otimes_R N^j & \xrightarrow{d_{\rightarrow}^{i,j}} & M^{i+1} \otimes_R N^j. \end{array}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 & (d_{\rightarrow}^{i,j+1} \circ d_{\uparrow}^{i,j} + d_{\uparrow}^{i+1,j} \circ d_{\rightarrow}^{i,j})(m \otimes n) \\
 &= (-1)^i (d_M^i \otimes_R \text{id}_{N^{j+1}}) \circ (\text{id}_{M^i} \otimes_R d_N^j)(m \otimes n) + (-1)^{i+1} (\text{id}_{M^i} \otimes_R d_N^{j+1}) \circ (d_M^i \otimes_R \text{id}_{N^j})(m \otimes n) \\
 &= (-1)^i ((d_M^i \otimes_R d_N^j)(m \otimes n) - (d_M^i \otimes_R d_N^j)(m \otimes n)) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

因此  $M^\bullet \otimes N^\bullet$  是双复形.

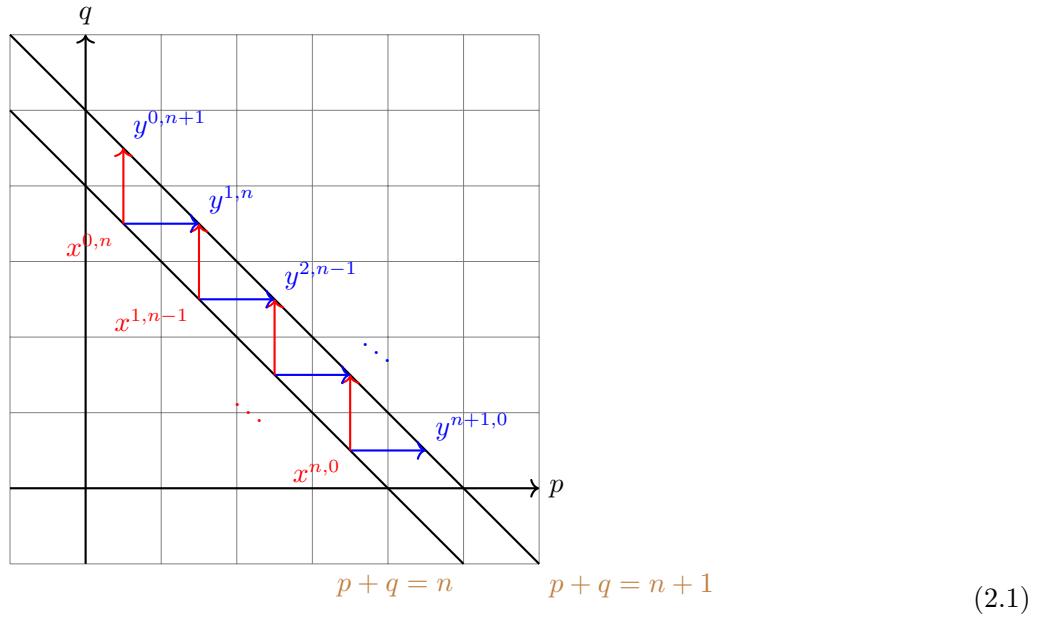
**定义.** 设  $M$  是双分次  $R$  模, 那么

$$\text{Tot}(M)^n := \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

和  $D^n : \text{Tot}(M)^n \rightarrow \text{Tot}(M)^{n+1}$ ,

$$D^n := \sum_{p+q=n} (d_{\rightarrow}^{p,q} + (-1)^p d_{\uparrow}^{p,q})$$

称为  $M$  的全复形 (total complex).



**引理 2.4.** 若  $M$  是双复形, 则  $(\text{Tot}(M), D)$  是复形.

很多时候, 我们关心的上同调问题是某个双复形的全复形的上同调群, 而谱序列就是一种计算全复形上同调群的某种技巧.

例 2.3. 给定一个第一象限的双复形  $(D, d_{\rightarrow}, d_{\uparrow})$ , 取

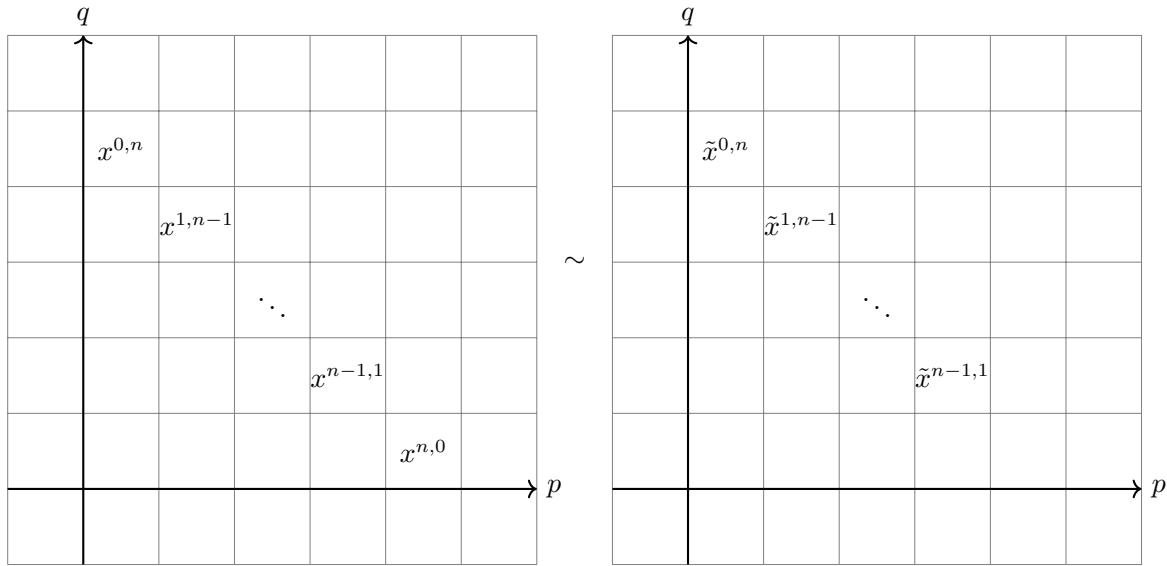
习题 2.1. 给定链复形的态射  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ , 求证  $\text{Cone } f \cong \text{Tot}$ .

例 2.4. 设  $M$  是双分次  $R$  模,  $(D, d_\rightarrow, d_\uparrow)$  是一个双复形, 那么我们可以定义双复形的转置  $M^T$ : 这意味着

$$\text{Tot}(M) = \text{Tot}(M^T).$$

**命题 2.10.** 给定第一象限的双复形  $(X^{\bullet,\bullet}, d_\rightarrow, d_\uparrow)$ , 若对任意  $q \geq 0$ ,  $X^{\bullet,q}$  都是正合的, 则  $\text{Tot}(X)$  也是正合的.

证明. 任取  $n$  阶上闭链  $x = \sum_{p=0}^n x^{p,n-p}$  (若没有第一象限的有限性条件, 这一步不正确, 见习题 2.2), 我们首先证明存在与  $x$  在同一  $D$  同伦类的元素  $\tilde{x} = \sum_{p=0}^{n-1} \tilde{x}^{p,n-p}$ , 即有如图



所示的代表元. 由于  $x = \sum_{p=0}^n x^{p,n-p}$  是上闭链,  $D(x) = D\left(\sum_{p=0}^n x^{p,n-p}\right) = 0$ , 特别地

$$d_\rightarrow(x^{n,0}) = 0.$$

由于双复形  $X^{\bullet,\bullet}$  的行都是正合的, 因此存在  $y^{n-1,0} \in X^{n-1,0}$  使得  $d_\rightarrow(y^{n-1,0}) = x^{n,0}$ . 按定义

$$D(y^{n-1,0}) = d_\rightarrow(y^{n-1,0}) + (-1)^{n-1} d_\uparrow(y^{n-1,0})$$

如上的讨论可以持续进行下去,

□

**推论 2.10.1.** 给定第一象限的双复形  $(X^{\bullet,\bullet}, d_\rightarrow, d_\uparrow)$ , 若存在  $(C^\bullet, d_C)$  和增广态射  $a^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^{\bullet,\bullet}$ , 对任意  $p \geq 0$ ,

$$0 \rightarrow C^p \xrightarrow{a^p} D^{0,p} \xrightarrow{d_I^{0,p}} D^{1,p} \xrightarrow{d_I^{1,p}} D^{2,p} \rightarrow \dots$$

都是正合列, 则  $a^\bullet$  诱导了同构

$$H^*(C^\bullet) \cong H^*(\text{Tot}(D^{\bullet,\bullet})).$$

证明. 我们要证明诱导的态射  $a^* : H^*(C^\bullet) \rightarrow H^*(\text{Tot}(D^{\bullet,\bullet}))$  同时是单态射和满态射.

任取  $H^*(C^\bullet)$  中的上闭链  $\alpha^n$ , 并且假设它有代表元  $\sum_{i=0}^n x^{i,n-i}$ . 由于  $D(\alpha^n) = 0$ , 第一象限意味着  $d_I^{n,0}(x^{n,0}) = 0$ , 再根据行正合的性质存在  $w^{n-1,0}$  使得  $d_I^{n-1,0}(w^{n-1,0}) = x^{n,0}$ .  $\square$

习题 2.2. 求证如下给出的双复形满足命题 2.10 的条件, 即对任意  $q$ ,  $X^{\bullet,q}$  都是正合的, 但其全复形的上同调不为零: 给定整数  $p$ , 定义

$$X^{p,q} := \begin{cases} \mathbb{Z} & q = -p \text{ 或者 } q = -p + 1 \\ 0 & \text{其他情况,} \end{cases}$$

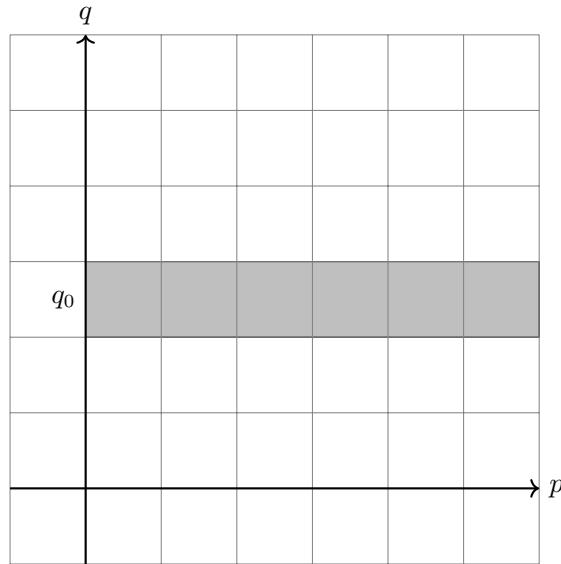
且  $d_\uparrow^{p,-p} : X^{p,-p} \rightarrow X^{p,-p+1} = 2$ ,  $d_\rightarrow^{p,-p} : X^{p,-p} \rightarrow X^{p+1,-p} = 1$ , 其余为 0.

$$H^{p,q}(\text{Tot}(X^{\bullet,\bullet})) := \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & q = -p + 1 \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

**定理 2.11.** 给定第一象限的双复形  $(X^{\bullet,\bullet}, d_\rightarrow, d_\uparrow)$ , 若  $H_\rightarrow^{p,q} H_\uparrow(X)$  只在某一行中, 则

$$H_\rightarrow^{p,q} H_\uparrow(X) \cong H^{p+q}(\text{Tot}(X)).$$

证明. 假设  $H_\rightarrow^{p,q} H_\uparrow(X) \neq 0$  当且仅当  $q = q_0$ , 如图所示:



我们首先注意到以下事实:

1. 任意给定元素  $[x] \in H_\rightarrow^{p,q} H_\uparrow(X)$ , 那么可以找到  $x \in H_\uparrow^{p,q}(X)$  是  $[x]$  的代表元, 满足  $d_\rightarrow^{p,q}(x) = 0 \in H_\uparrow^{p,q+1}(X)$ , 而这意味着存在代表元  $x^{p,q} \in X^{p,q}$  使得

$$d_\rightarrow(x^{p,q}) = d_\uparrow(x^{p+1,q-1}),$$

而  $x^{p,q}$  是  $x$  的代表元则意味着  $d_{\uparrow}(x^{p,q}) = 0$ , 即

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \uparrow d_{\uparrow} & \\ x^{p,q} & \xrightarrow{d_{\rightarrow}} & d_{\rightarrow}(x^{p,q}) = d_{\uparrow}(x^{p+1,q-1}) \\ & \uparrow d_{\uparrow} & \\ & x^{p+1,q-1}. & \end{array} \quad (2.2)$$

2. 若元素  $[x] \in H_{\rightarrow}^{p,q} H_{\uparrow}(X)$  为零, 由  $x^{p,q} \in X^{p,q}$  给出的代表元  $x \in H_{\uparrow}^{p,q}(X)$  是  $d_{\rightarrow}$  的像, 即存在  $x^{p-1,q}$  使得

$$d_{\rightarrow}([x^{p-1,q}]) = x = [x^{p,q}] \in H_{\uparrow}^{p,q}(X),$$

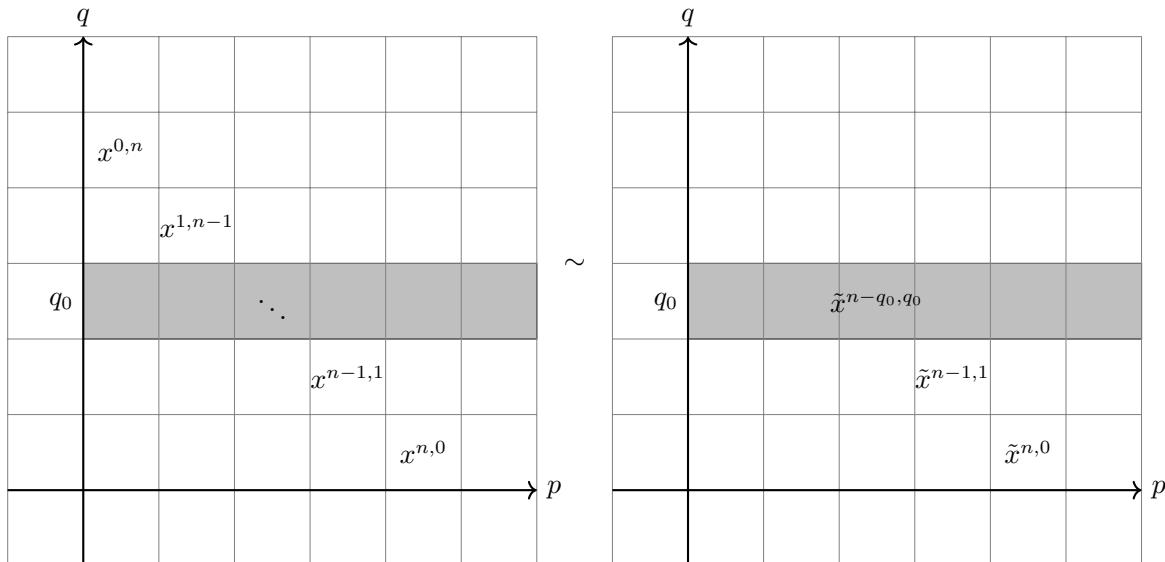
这意味着存在元素  $x^{p,q-1}$  使得

$$x^{p,q} - d_{\rightarrow}(x^{p-1,q}) = d_{\uparrow}(x^{p,q-1}),$$

其中由于  $x^{p-1,q}$  是  $d_{\uparrow}$  上同调的代表元  $d_{\uparrow}(x^{p-1,q}) = 0$ , 即代表元为图

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \uparrow d_{\uparrow} & \\ x^{p-1,q} & \xrightarrow{d_{\rightarrow}} & x^{p,q} = d_{\uparrow}(x^{p,q-1}) + d_{\rightarrow}(x^{p-1,q}) \\ & \uparrow d_{\uparrow} & \\ & x^{p,q-1}. & \end{array} \quad (2.3)$$

一方面, 任取  $n$  阶上闭链  $x = \sum_{q=0}^n x^{n-q,q}$ , 不妨设  $n > q_0$ , 我们首先证明存在与  $x$  在同一  $D$  同伦类的元素  $\tilde{x} = \sum_{q=0}^{q_0} \tilde{x}^{n-q,q}$ , 即有如图



所示的代表元. 根据定义,

$$D(x) = D \left( \sum_{q=0}^n x^{n-q,q} \right) = \sum_{q=0}^n D(x^{n-q,q}),$$

由于  $X^{-1,n+1} = 0$ ,  $D(x)$  的  $(0, n+1)$  项只能来源于  $d_{\uparrow}(x^{0,n})$ , 因而由上闭链知  $d_{\uparrow}(x^{0,n}) = 0$ , 进而根据等式 2.2 知  $x^{0,n}$  给出了  $H_{\rightarrow}^{0,n} H_{\uparrow}(X)$  中的一个元素, 于是根据  $H_{\rightarrow}^{n,0} H_{\uparrow}(X) = 0$  知, 存在  $y^{0,n-1}$  使得

$$d_{\uparrow}(y^{0,n-1}) = x^{0,n},$$

(实际上应当是  $d_{\uparrow}(y^{0,n-1}) + d_{\rightarrow}(z^{-1,n}) = x^{0,n}$  但  $z^{-1,n} = 0$ ) 于是

$$\sum_{q=0}^n x^{n-q,q} = d_{\uparrow}(x^{0,n-1}) + \sum_{q=1}^n x^{n-q,q} = D(x^{0,n-1}) + (x^{1,n-1} - d_{\rightarrow}(x^{0,n-1})) + \sum_{q=2}^n x^{n-q,q},$$

令  $\tilde{x}^{1,n-1} := x^{1,n-1} - d_{\rightarrow}(x^{0,n-1})$ , 则意味着  $x$  与

$$\tilde{x}^{1,n-1} + \sum_{q=2}^n x^{n-q,q}$$

代表相同的  $D$  上同调类. 同样的道理,  $\tilde{x}^{1,n-1}$  也给出了  $H_{\rightarrow}^{1,n-1} H_{\uparrow}(X)$  中的元素, 若  $H_{\rightarrow}^{1,n-1} H_{\uparrow}(X) = 0$  则存在  $y^{1,n-2}, z^{0,n-1}$  使得

$$d_{\rightarrow}(z^{0,n-1}) + (-1)^1 d_{\uparrow}(y^{1,n-2}) = \tilde{x}^{1,n-1}$$

且  $d_{\uparrow}(z^{0,n-1}) = 0$ , 于是

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{1,n-1} + \sum_{q=2}^n x^{n-q,q} &= d_{\rightarrow}(z^{0,n-1}) + (-1)^1 d_{\uparrow}(y^{1,n-2}) + \sum_{q=2}^n x^{n-q,q} \\ &= D(z^{0,n-1}) + D(y^{1,n-2}) + (x^{2,n-2} - (-1)^1 d_{\rightarrow}(y^{1,n-2})) + \sum_{q=3}^n x^{n-q,q}, \end{aligned}$$

取  $\tilde{x}^{2,n-2} = x^{2,n-2} - (-1)^1 d_{\rightarrow}(y^{1,n-2})$ , 则  $x$  与

$$\tilde{x}^{2,n-2} + \sum_{q=3}^n x^{n-q,q}$$

代表相同的  $D$  上同调类. 这样的构造可以一直进行到第  $q_0$  行, 使得

$$x \sim \tilde{x}^{n-q_0,q_0} + \sum_{q=q_0+1}^n x^{n-q,q} \tag{2.4}$$

此时我们定义

$$\begin{aligned} f : H^{p+q}(\text{Tot}(X)) &\rightarrow H_I^p H_{II}^q(X) \\ [x] &\mapsto [\tilde{x}^{n-q_0,q_0}]. \end{aligned}$$

另一方面, 任意给定满足图 2.2 的  $H_{\rightarrow}^{p,q} H_{\uparrow}(X)$  的代表元  $x^{p,q}$ , 若  $q \neq q_0$  则按照图 2.3 存在元素  $y^{p-1,q}, y^{p,q-1}$  使得

$$x^{p,q} = d_{\rightarrow}(y^{p-1,q}) + d_{\uparrow}(y^{p,q-1})$$

且  $d_{\uparrow}(y^{p-1,q}) = 0$ . 此时我们定义

$$\begin{aligned} g : H_{\rightarrow}^p H_{\uparrow}^q(X) &\rightarrow H^{p+q}(\text{Tot}(X)) \\ [x] &\mapsto [x^{p,q} + d_{\rightarrow}(y^{p,q-1})]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

接下来考虑  $q = q_0$  的情形. 注意到

$$d_{\uparrow} d_{\rightarrow}(x^{p+1,q-1}) = d_{\rightarrow} d_{\uparrow}(x^{p+1,q-1}) = d_{\rightarrow} d_{\rightarrow}(x^{p-1,q}) = 0,$$

故  $d_{\rightarrow}(x^{p+1,q-1})$  给出了  $H_{\uparrow}^{p+2,q-1}(X)$  中元素的代表元, 特别地此时  $q = q_0$ ,  $H_{\rightarrow}^{p+2,q-1} H_{\uparrow}(X) = 0$ , 因此图2.3说明存在  $y^{p+1,q-1}$  和  $x^{p+2,q-2}$  满足

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \uparrow d_{\uparrow} & \\ y^{p+1,q-1} & \xrightarrow{d_{\rightarrow}} & d_{\rightarrow}(x^{p+1,q-1}) = d_{\uparrow}(y^{p+1,q-1}) + d_{\rightarrow}(x^{p+2,q-2}) \\ & \uparrow d_{\uparrow} & \\ & x^{p+2,q-2}. & \end{array}$$

取  $\tilde{x}^{p+1,q-1} = x^{p+1,q-1} - y^{p+1,q-1}$ , 此时

$$\begin{array}{ccc} \tilde{x}^{p+1,q-1} & \xrightarrow{d_{\rightarrow}} & d_{\rightarrow}(\tilde{x}^{p+1,q-1}) = d_{\uparrow}(x^{p+2,q-2}) \xrightarrow{d_{\rightarrow}} 0 \\ & \uparrow d_{\uparrow} & \\ & x^{p+2,q-2}, & \end{array}$$

这意味着

$$\begin{aligned} g : H_{\rightarrow}^p H_{\uparrow}^q(X) &\rightarrow H^{p+q}(\text{Tot}(X)) \\ [x] &\mapsto [x + \tilde{x}^{p+1,q-1} + \tilde{x}^{p+2,q-2} + \dots]. \end{aligned}$$

我们需要验证如上的映射是良定义的, 并且互为逆.  $\square$

这就是说, 横行正合的增广双复形的全上同调同于增广列的上同调.

## 2.4.2 复形中的乘法对象

**定义.** 给定  $R$  模复形  $M^{\bullet}$  和  $N^{\bullet}$ , 那么它们的张量积(tensor product)  $(M \otimes N)^{\bullet}$  满足

$$(M \otimes N)^n := \bigoplus_{i+j=n} M^i \otimes_R N^j,$$

微分映射由

$$\begin{aligned} d^n : (M \otimes N)^n &\rightarrow (M \otimes N)^{n+1} \\ x \otimes y &\mapsto d_M^n(x) \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d_N^n(y) \end{aligned}$$

扩张给出.

我们来验证如上定义给出了一个上链复形:

如下命题说明这样的定义是自然的:

**命题 2.12.** 给定  $R$  模复形  $M^\bullet$  和  $N^\bullet$ , 记  $M^\bullet \otimes N^\bullet$  是双复形

此处有图

那么

$$\text{Tot}(M^\bullet \otimes N^\bullet) \simeq (M \otimes N)^\bullet.$$

证明.

□

**引理 2.5.** 给定  $R$  模复形同态的同伦  $f_1^\bullet \simeq f_2^\bullet : M_1^\bullet \rightarrow M_2^\bullet$  和  $g_1^\bullet \simeq g_2^\bullet : N_1^\bullet \rightarrow N_2^\bullet$ , 那么存在链同伦

$$f_1^\bullet \otimes g_1^\bullet \simeq f_2^\bullet \otimes g_2^\bullet : (M_1 \otimes N_1)^\bullet \rightarrow (M_2 \otimes N_2)^\bullet,$$

特别地若有链同伦等价  $M_1^\bullet \simeq M_2^\bullet, N_1^\bullet \simeq N_2^\bullet$ , 则有  $(M_1 \otimes N_1)^\bullet \simeq (M_2 \otimes N_2)^\bullet$ .

如果将引理的链同伦换为拟同构, 则结论并不正确.

Mac Lane, Homology, Theorem 9.3 page 164.

例 2.5.

$$\mathbb{Z}[m] \otimes \mathbb{Z}[n] = \mathbb{Z}[m+n],$$

$$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes \mathbb{Z}[n] = \mathbb{Z}[m] \otimes (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[n] = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m+n]$$

习题 2.3. 求证上链复形  $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[n]$  的上同调群是

$$H^q((\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[n]) = \begin{cases} \mathbb{Z}/\gcd(k, l)\mathbb{Z} & q = m+n, m+n+1 \\ 0 & q \neq m+n, m+n+1. \end{cases}$$

**命题 2.13.** 给定  $R$  模复形  $M^\bullet$  和  $N^\bullet$ , 那么双线性函数

$$M^p \times N^q \rightarrow (M \otimes N)^{p+q}$$

$$(x, y) \mapsto x \otimes y$$

诱导了上同调之间的映射

$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \rightarrow H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet).$$

证明. 任取  $(x, y) \in Z^p(M^\bullet) \times Z^q(N^\bullet)$ , 按照定义

$$d(x \otimes y) = d_M^p(x) \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d_N^q(y) = 0,$$

于是  $- \times - (Z^\bullet(M^\bullet) \times Z^\bullet(N^\bullet)) \subseteq Z^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$ . 类似地, 任意  $(d_M^{n-1}(x), y) \in B^p(M^\bullet) \times Z^q(N^\bullet)$  满足

$$d(x \otimes y) = d_M^{p-1}(x) \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d_N^{q-1}(y) = d_M^{p-1}(x) \otimes y,$$

因此 $- \times -(B^\bullet(M^\bullet) \times Z^\bullet(M^\bullet)) \subseteq B^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$ , 对偶地 $- \times -(Z^\bullet(M^\bullet) \times B^\bullet(M^\bullet)) \subseteq B^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$ . 于是诱导的映射

$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \rightarrow H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet)$$

满足 $[z^p], [z^q] \mapsto [z^p \otimes z^q]$ 是良定义的, 线性性是根据定义直接的.  $\square$

**推论 2.13.1.** 给定交换环 $R$ 和 $R$ 模上链复形 $S^\bullet$ , 对任意指标 $p, q$ 存在双线性映射 $- \smile - : S^p \times S^q \rightarrow S^{p+q}$ 满足

$$d(\alpha \smile \beta) = d(\alpha) \smile \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \smile d(\beta), \quad (2.6)$$

那么有诱导的“乘法”

$$- \smile - : H^p(S^\bullet) \times H^q(S^\bullet) \rightarrow H^{p+q}(S^\bullet).$$

证明. 根据张量积的泛性质, 存在 $R$ 线性映射 $S^p \otimes_R S^q \dashrightarrow S^{p+q}$  (也记为 $\smile$ ) 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} S^p \times S^q & \xrightarrow{\smile} & S^{p+q} \\ \otimes \downarrow & \nearrow & \\ S^p \otimes_R S^q, & & \end{array}$$

于是等式2.6说明诱导的 $\smile : S^p \otimes_R S^q \dashrightarrow S^{p+q}$ 是链映射, 因此存在

$$\smile : H^{p+q}((S \otimes S)^\bullet) \rightarrow H^{p+q}(S^\bullet).$$

复合命题2.13给出的上同调之间的映射, 这样得到了所希望的 $- \smile - : H^p(S^\bullet) \times H^q(S^\bullet) \rightarrow H^{p+q}(S^\bullet)$ .  $\square$

**例 2.6.** 给定拓扑空间, 那么在 $S^\bullet(X)$ 上有定义的乘积

**命题 2.14.** 上同调的张量积满足:

1. 结合性: 对任意 $x \in H^p(M^\bullet), y \in H^q(N^\bullet), z \in H^r(L^\bullet)$ ,

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z),$$

2. 自然性: 任意给定上链映射 $f : M^\bullet \rightarrow U^\bullet$ 和 $g : N^\bullet \rightarrow V^\bullet$ , 那么对任意的 $x \in H^p(M^\bullet), y \in H^q(N^\bullet)$ ,

$$(f \otimes g)^{p+q}(x \otimes y) = f^p(x) \otimes g^q(y).$$

**定理 2.15 (Künneth).** 给定环 $R$ 和平坦右 $R$ 模组成的复形 $P_\bullet$ 和左 $R$ 模复形 $Q_\bullet$ , 使得所有的子模 $\text{Im } \partial_{n+1}$ 也都是平坦的, 那么对于任意的和 $n \in \mathbb{Z}$ , 都存在正合序列

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(P_\bullet) \otimes_R H_q(Q_\bullet) \rightarrow H_n((P \otimes Q)_\bullet) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^R(H_p(P_\bullet), H_q(Q_\bullet)) \rightarrow 0.$$

**推论 2.15.1.** 给定主理想整环  $R$  的自由  $R$  模上链复形  $M_1^\bullet, M_2^\bullet, N_1^\bullet, N_2^\bullet$ , 满足  $H^n(M_1^\bullet) \cong H^n(M_2^\bullet), H^n(N_1^\bullet) \cong H^n(N_2^\bullet)$  对所有的  $n \in \mathbb{Z}$  成立, 那么  $H^n(M_1^\bullet \otimes M_2^\bullet) \cong H^n(N_1^\bullet \otimes N_2^\bullet)$  对所有的  $n \in \mathbb{Z}$  成立.

**推论 2.15.2.** 给定主理想整环  $R$  的自由  $R$  模上链复形  $M^\bullet, N^\bullet$ , 使得  $H^n(N^\bullet)$  都是有限生成的自由模, 那么

$$H^*(M^\bullet \otimes N^\bullet) \cong H^*(M^\bullet) \otimes H^*(N^\bullet).$$

这一小节的所有内容都可以形式地对偶到链复形的范畴上, 得到相同的结果.

### 2.4.3 同调与上同调

这里我们只讨论上同调由同调给出的情形, 另一种情形完全对偶地可以得出. 此时, 假定  $(M_\bullet, \partial_\bullet^M), (N_\bullet, \partial_\bullet^N)$  是给定的  $R$  模链复形,  $(M^\bullet = \text{Hom}_R(M_\bullet, R), d_M^\bullet = \text{Hom}_R(\partial_\bullet^M, R)), (N^\bullet = \text{Hom}_R(N_\bullet, R), d_N^\bullet = \text{Hom}_R(\partial_\bullet^N, R))$  是诱导的上链复形.

事实上, 如此的设定并不是必须的, 在后面的所有构造和证明中, 我们真正用到的是给定一个  $R$  模复形  $(M_\bullet, \partial_\bullet^M)$  和  $R$  模上链复形  $(M^\bullet, d_M^\bullet)$ , 存在  $R$  双线性的映射

$$\langle -, - \rangle : M^n \times M_n \rightarrow R$$

满足

$$\langle d(f), m \rangle = \langle f, \partial(m) \rangle$$

对任意  $f \in M^n, m \in M_n, n \in \mathbb{Z}$  都成立. 但是, 在本小节我们还是选择最初具体的假定, 以帮助理解.

首先, 命题 2.13 的对偶给出了链复形层面的张量积, 而它本身给出了上链复形层面的张量积. 当上链复形是由链复形诱导时, 张量积同样可以被诱导:

#### 引理 2.6. 双线性函数

$$\begin{aligned} M^p \times N^q &\rightarrow (M \otimes N)^{p+q} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha \otimes \beta : (m, n) \mapsto \alpha(m)\beta(n)) \end{aligned}$$

诱导了  $(M \otimes N)^\bullet$  的微分映射

$$\begin{aligned} d^n : (M \otimes N)^n &\rightarrow (M \otimes N)^{n+1} \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto d_M^n(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \otimes d_N^n(\beta), \end{aligned}$$

且给出了上同调类的张量积

$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \rightarrow H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet).$$

证明. 计算可得

$$\begin{aligned}
 \langle d(\alpha \otimes \beta), a \otimes b \rangle &= \langle \alpha \otimes \beta, \partial(a \otimes b) \rangle \\
 &= \langle \alpha \otimes \beta, \partial(a) \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes \partial(b) \rangle \\
 &= \langle \alpha, \partial(a) \rangle \langle \beta, b \rangle + (-1)^{\deg a} \langle \alpha, a \rangle \langle \beta, \partial(b) \rangle \\
 &= \langle d\alpha, a \rangle \langle \beta, b \rangle + (-1)^{\deg \alpha} \langle \alpha, a \rangle \langle d\beta, b \rangle \\
 &= \langle d(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \otimes d(\beta), a \otimes b \rangle,
 \end{aligned}$$

于是

□

此时, 同调与上同调存在相互的作用:

**命题 2.16.** 双线性函数

$$\begin{aligned}
 - \frown - : N^q \times (M \otimes N)_{p+q} &\rightarrow M_p \\
 (\beta, a \otimes b) &\mapsto \beta(b)a
 \end{aligned}$$

对任意  $\beta \in N^q, c \in (M \otimes N)_{p+q}$  满足

$$\partial(\beta \frown c) = (-1)^p d\beta \frown c + \beta \frown (\partial c),$$

于是诱导了上同调在同调上的乘积

$$H^q(N^\bullet) \times H_{p+q}((M \otimes N)^\bullet) \rightarrow H_p(M_\bullet).$$

证明. 设  $c = \sum_{i=0}^N a_i \otimes b_i$ , 那么

$$\begin{aligned}
 \beta \frown (\partial c) &= \beta \frown \left( \sum_{i=0}^N \partial a_i \otimes b_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg a_i} a_i \otimes \partial b_i \right) \\
 &= \sum_{i=0}^N \beta(b_i) \partial a_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg c - \deg b_i} \beta(\partial b_i) a_i \\
 &= \partial \sum_{i=0}^N \beta(b_i) a_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg c - \deg \beta - 1} d\beta(b_i) a_i \\
 &= \partial(\beta \frown c) - (-1)^{\deg c - \deg \beta} d\beta \frown c.
 \end{aligned}$$

□

例 2.7. 给定拓扑空间  $X$ ,

**命题 2.17.** 任意给定  $\alpha \in H^p(M^\bullet), \beta \in H^q(N^\bullet), \gamma \in H^r(L^\bullet)$ ,  $a \in H_{p+q}(M \otimes N)$ ,  $b \in H_{p+q+r}(M \otimes N \otimes L)$ , 满足

1. 结合性:  $(\beta \otimes \gamma) \frown c = \beta \frown (\gamma \frown c)$ ,
2. 对偶性:  $\langle \alpha \otimes \beta, b \rangle = \langle \alpha, \beta \frown b \rangle$ ,
3. 自然性: 任意给定上链映射  $f: M_\bullet \rightarrow U_\bullet$  和  $g: N_\bullet \rightarrow V_\bullet$ , 那么对任意的  $x \in H^p(M^\bullet), y \in H^q(N^\bullet)$ ,

$$f_*((g^*\beta) \frown b) = \beta \frown (f \otimes g)(b),$$

用交换图表示为

$$\begin{array}{ccc} N^q & \times & (M \otimes N)_{p+q} \xrightarrow{\sim} M_p \\ \uparrow g & & \downarrow f \otimes g \\ V^q & \times & (U \otimes V)_{p+q} \xrightarrow{\sim} U_p \end{array}$$

## 2.5 一个例子:

我们感兴趣的是一类特殊图的极限, 被称为Abel群组成的塔(tower of abelian groups), 其中指标集  $I = \mathbb{N}^\circ$  是偏序集

$$\cdots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0,$$

用**Ab**中的对象表示就是

$$\cdots \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0,$$

或者更形式地, 这样一个对象就是函子

$$A: \mathbb{N}^\circ \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

它的极限  $\lim_{\leftarrow} A_n$

$$\alpha: \prod_{i \in \mathbb{N}^\circ} A_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}^\circ} A_i$$

**定义.** 给定一个Abel群塔  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , 考虑映射

$$\Delta: \prod_{i \in \mathbb{N}^\circ} A_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}^\circ} A_i,$$

其中  $\Delta = \text{id} - \alpha$ , 定义

$$\lim_{\leftarrow}^n A_i := \begin{cases} \lim_{\leftarrow} A_i & n = 0 \\ \text{Coker } \Delta & n = 1 \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

**定义.** 设一个Abel群塔 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 若满足对任意 $m \geq 0$ , 都存在 $n \geq m$ 使得 $i \geq n$ 时, 映射

$$A_i \rightarrow A_m$$

的像对所有的*i*都相同, 则称 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 满足Mittag-Leffler条件.

**定理 2.18.** 若Abel群塔 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 满足Mittag-Leffler条件, 那么

$$\lim_{\leftarrow}^1 A_n = 0.$$

证明.

□

**命题 2.19.** 设 $\cdots \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0$ 是一个正向系, 满足任意 $A_i$ 都是零调的Abel群上链复形, 且所有的 $A_{i+1} \rightarrow A_i$ 都是满射, 那么 $\lim_{\leftarrow} A_n$ 也是零调的.



# 第三章 谱序列

同调代数关心了许多基本的问题，比如给定 $R$ 模 $M$ 的子模 $K$ 同态 $f : K \rightarrow N$ ，

## 3.1 正合对和导出正合对

**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴， $D, E$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象， $f, g, h$ 是映射，若

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ & \nwarrow h & \swarrow g \\ & E & \end{array}$$

是正合的，那么称 $(D, E, f, g, h)$ 是正合对(exact couple).

**定理 3.1.** 若 $(D, E, f, g, h)$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 上的一个正合对，那么 $d := g \circ h : E \rightarrow E$ 给出 $\mathcal{A}$ 上的一个微分对象 $(E, d)$ ，且存在一个新的正合对 $(D_2, E_2, f_2, g_2, h_2)$

$$\begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow{f_2} & D_2 \\ & \nwarrow h_2 & \swarrow g_2 \\ & E_2, & \end{array}$$

满足 $E_2 = H(E, d)$ ，称为导出对(derived couple).

证明. 首先我们验证微分.按照定义， $d \circ d = (g \circ h) \circ (g \circ h) = g \circ (h \circ g) \circ h = g \circ 0 \circ h = 0$ .

按照条件定义 $E_2$ 是子商对象 $H(E, d)$ ，定义 $D$ 的子对象

$$D_2 := \text{im } f \subseteq D,$$

且 $f_2 := f|_{D_2} = f \circ \iota$ ，其中 $\iota : D_2 \hookrightarrow D$ 是嵌入.接下来我们需要定义 $h_2 : E_2 \rightarrow D_2$ 和 $g_2 : D_2 \rightarrow E_2$ ，并且验证它们是正合对.

1. 首先我们证明复合态射

$$\text{im } h = \ker f \hookrightarrow D \xrightarrow{g} E \twoheadrightarrow E_2 = \frac{\ker g \circ h}{\text{im } g \circ h} = \text{coker } g \circ h$$

是0态射：注意到由余核的定义，复合

$$D \xrightarrow{\tilde{h}} \text{im } h \hookrightarrow D \xrightarrow{g} E \twoheadrightarrow E_2$$

为0，且由定理A.8， $\tilde{h}$ 是满态射，于是复合 $\ker f \hookrightarrow D \xrightarrow{g} E \twoheadrightarrow E_2$ 为0. 同时定理A.8说明 $\text{im } f = \text{coker } \ker f$ ，于是根据余核的定义，存在唯一的态射 $\text{im } f \dashrightarrow E_2$ 使得图

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \longrightarrow & D & \twoheadrightarrow & \text{im } f \\ & & \downarrow g & & \downarrow \\ & & E & \twoheadrightarrow & E_2 \end{array}$$

交换，记这个态射为 $g_2$ .

2. 根据正合性，运用与上一部分相同的论述可得

$$\text{im } d \hookrightarrow E \xrightarrow{h} D = 0,$$

并且注意到

$$\ker d \xrightarrow{h|_{\ker d}} D \xrightarrow{g} E = \ker d \xrightarrow{d|_{\ker d}} E = 0,$$

正合性还说明 $\text{im } h|_{\ker d} \subseteq \ker g = \text{im } f =: D_2$ ，于是余核的定义诱导了态射

$$E_2 = \frac{\ker d}{\text{im } d} \rightarrow D_2,$$

记为 $h_2$ .

3. 对于正合性的验证

□

从证明中可以看出，诱导对中的 $D_2$ 是子对象，诱导的态射 $f_2$ 是限制，而 $E_2$ 是 $E$ 的子商对象. 在 $\mathcal{A}$ 是 $R - \mathbf{Mod}$ 时， $g_2, h_2$ 有简单的描述：

1. 任取 $y \in D_2$ ，因此存在 $x \in D$ 使得 $y = f(x)$ ，且 $g(x)$ 是上闭链（直接验证 $d(g(x)) = g \circ h(g(x)) = g(h \circ g(x)) = 0$ ），于是 $g_2$ 可以定义为 $g(x)$ 所代表的 $H(E, d)$ 中的元素，即

$$\begin{aligned} g_2 : D_2 &\rightarrow E_2 \\ y = f(x) &\mapsto [g(x)]. \end{aligned}$$

2. 任取 $[z] \in E_2$ ，其中 $z \in E$ 是上闭链满足 $0 = d(z) = g(h(z))$ ，于是 $h(z) \in \text{Ker } g = \text{Im } f = D_2$ ，因而 $h_2([z])$ 可以定义为 $h(z)$ ，即

$$\begin{aligned} h_2 : E_2 &\rightarrow D_2 \\ [z] &\mapsto h(z). \end{aligned}$$

二者由于恰是证明中所描述的态射，因而良定义与正合性是已经证明的.

例 3.1. 给定正合对

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ & \nwarrow h & \swarrow g \\ & E & \end{array}$$

满足 $h$ 是0态射，则 $d = g \circ h = 0$ ，于是根据正合性， $f : D \rightarrow D$ 是单射，因此 $f : D \rightarrow \text{im } f$ 是同构，

## 3.2 濾子和收敛性

### 3.2.1 濾子和谱序列

**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $X$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 则 $X$ 的一个递降濾子(descending filtration)是一族 $X$ 的子对象 $\{F_n X\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 满足

$$X = F_{-\infty} X \supseteq \cdots \supseteq F_n X \supseteq F_{n+1} X \supseteq \cdots 0 = F_{+\infty} X.$$

对偶地, 若 $X$ 的子对象 $\{F^n X\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 满足

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F^n X \subseteq F^{n+1} X \subseteq \cdots X,$$

则称这是递增濾子(ascending filtration).

如上定义中递增与递降事实上只是对偶的存在, 递降濾子用于处理上同调的情形, 递增濾子处理同调的情形. 略微不同于之前的讨论, 谱序列中虽然同调与上同调依然是对偶的, 但实际的处理会非常麻烦. 因此我们这章选择列出包含对偶的结果, 但证明则是完全对称的.

在给出任何例子之前, 我们需要给出定义的详细解释:

- 给定 $X$ 的上链濾子 $\{F^n X\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , 对任意的整数 $n$ ,  $F^n X$ 都是 $X$ 的子对象, 即存在单态射 $i_n : F_n X \rightarrow X$ ;
- 对任意整数 $n$ , 存在单态射 $\iota_{n+1} : F_{n+1} X \rightarrow F_n$ , 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i_n \uparrow & \swarrow i_{n+1} & \\ F_n X & \xleftarrow{\iota_{n+1}} & F_{n+1} X \end{array}$$

即有 $i_{n+1} \circ \iota_n = i_n$ ;

- 图

$$\cdots \xleftarrow{\iota_n} F_n X \xleftarrow{\iota_{n+1}} F_{n+1} X \xleftarrow{\iota_{n+2}} \cdots$$

在 $\mathcal{A}$ 中的极限和余极限都存在, 记为 $F_{+\infty} X$ 和 $F_{-\infty} X$ , 且满足 $F_{-\infty} X = X$ 和 $F_{+\infty} X = 0$ .

mono limit

例 3.2. 假定 $\mathcal{A}$ 是包含所有余积的Abel范畴 (比如**Ab**), 给定 $\mathcal{A}$ 上的复形 $(C^\bullet, d)$ , 我们可以构造递降濾子如下: 取 $X := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n$ , 且

$$F_n X := \bigoplus_{q=n}^{\infty} C^q,$$

即递降濾子为

$$\cdots \longrightarrow C^{-1} \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \longrightarrow \cdots$$

$$| \xrightarrow{F_{-1}X}$$

$$| \xrightarrow{F_0X}$$

此时，微分态射  $d : X \rightarrow X$  是一个阶数为 1 的态射，即  $d : X \rightarrow X[1]$ .

考虑  $A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_n X$ ，那么另一种写法  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_{n+1} X$  给出了短正合列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} A \rightarrow B \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

其中  $i : A \rightarrow A$  是  $F_{n+1} X \hookrightarrow F_n X$  给出的嵌入，那么此时

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \frac{F_n X}{F_{n+1} X} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n.$$

同时， $C^\bullet$  上的微分  $d$  诱导了滤子上的微分

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \supseteq & F_{-1} X & \supseteq & F_0 X & \supseteq & F_1 X & \subseteq & \cdots \\ & & \searrow d & & \searrow d & & \searrow d & & \\ \cdots & \supseteq & F_{-1} X & \supseteq & F_0 X & \supseteq & F_1 X & \supseteq & \cdots, \end{array}$$

这样也诱导了  $A, B$  上的微分，于是短正合列 3.1 给出了长正合序列

$$\cdots \rightarrow H^*(A) \rightarrow H^*(A[-1]) \rightarrow H^*(B) \rightarrow H^{*+1}(A) \rightarrow \cdots.$$

按定义，

$$H^q(i) : H^*(A) \rightarrow H^*(A[-1])$$

给出了自然的嵌入

$$\bigoplus_{q=n}^{\infty} H^q(C^\bullet) \hookrightarrow \bigoplus_{q=n-1}^{\infty} H^q(C^\bullet),$$

同时

$$H^q(B) = H^q(C^\bullet),$$

这刚好是  $H^q(i)$  的余核，也就意味着对于上链复形  $(C^\bullet, d)$ ，链复形自身给出的滤子结构并不给出更多的信息。

例 3.3. 取 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  和其上的复形  $(X^\bullet, d^\bullet)$ ，按定义它的子对象是  $\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$  中的单态射，具体写出来

1. 对任意整数  $n$ ，存在单态射  $i_n : Y_n \hookrightarrow X_n$ ；

2. 对任意整数  $n$ ，图

$$\begin{array}{ccc} Y_n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y_{n+1} \\ \downarrow i_n & & \downarrow i_{n+1} \\ X_n & \xrightarrow{d_X^n} & X_{n+1} \end{array}$$

交换, 即  $d_X^n \circ i_n = i_{n+1} \circ d_Y^n$ , 我们也记为  $d(Y_n) \subseteq Y_{n+1}$ .

我们称  $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$  是  $(X^\bullet, d_X^\bullet)$  的子复形.

结合例3.3, 我们有

**定义.** 给定Abel范畴  $\mathcal{A}$  上的上链复形  $(X^\bullet, d^\bullet)$ , 若对任意整数  $p$ ,  $X^p$  上都存在递降滤子  $\{F_n X^p\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , 满足

$$d^n(F_p X^n) \subseteq F_p X^{n+1},$$

则称  $(X^\bullet, d^\bullet)$  是可滤上链复形(filtered cochain complex).

**定理 3.2.** 每一个 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的上链  $X^\bullet$  的滤子  $F_p X^\bullet$  都给出一个正合对

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f(-1,1)} & D \\ & \swarrow h(1,0) & \searrow g(0,0) \\ & E, & \end{array}$$

其中映射的度在图中已经标出.

证明. 我们有复形的短正合列

$$0 \rightarrow F_{p+1} X^\bullet \xrightarrow{i_{p+1}} F_p X^\bullet \xrightarrow{\pi_p} F_p X^\bullet / F_{p+1} X^\bullet \rightarrow 0,$$

这诱导了上同调群的长正合序列

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow H^n(F_{p+1} X^\bullet) \xrightarrow{H^n(i_{p+1})} H^n(F_p X^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi_p)} H^n(F_p X^\bullet / F_{p+1} X^\bullet) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(F_{p+1} X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(i_{p+1})} H^{n+1}(F_p X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(\pi_p)} H^{n+1}(F_p X^\bullet / F_{p+1} X^\bullet) \rightarrow \cdots. \end{aligned}$$

我们取  $n = p + q$ ,  $f = H^\bullet(i_{p+1})$ ,  $g = H^\bullet(\pi_p)$ ,  $h = \delta^\bullet$ , 并且

$$\begin{aligned} D &= \{D^{p,q} := H^{p+q}(F_p X^\bullet)\} \\ E &= \{E^{p,q} := H^{p+q}(F_p X^\bullet / F_{p+1} X^\bullet)\} \end{aligned}$$

代入到长正合序列中即为

$$\cdots \rightarrow D^{p+1,q-1} \xrightarrow{f^{p+1,q-1}} D^{p,q} \xrightarrow{g^{p,q}} E^{p,q} \xrightarrow{h^{p,q}} D^{p+1,q} \rightarrow \cdots.$$

□

定理3.2于是可以描述为, 上链的(递降)滤子给出双分次正合对.

**例 3.4.** 我们换个角度来考虑定理3.2的结论. 假定  $\mathcal{A}$  是包含所有余积的Abel范畴(比如**Ab**),  $\mathcal{A}$  中的上链  $X^\bullet$  有滤子  $F_p X^\bullet$ , 定义  $A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_n X$ , 那么滤子的嵌入给出了短正合列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} A \rightarrow B \rightarrow 0,$$

**推论 3.2.1.** 每一个Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的上链 $X^\bullet$ 的滤子 $F_p X^\bullet$ 都给出一族正合对

$$\begin{array}{ccc} D_r & \xrightarrow{f_r (1,-1)} & D_r \\ h_r (-1,2) \swarrow & & \searrow g_r (1-r,r-1) \\ E_r, & & \end{array}$$

且满足

1. 双分次映射 $f_r, g_r, h_r$ 的度分别为 $(1, -1), (1-r, r-1)$ 和 $(-1, 2)$ .
2. 微分 $d_r$ 的度为 $(0)$ , 它由 $hf_{r+1}g$ 诱导.

证明.

□

**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $X$ 是 $\mathcal{A}$ 中的双分次对象,  $d$ 是双分次映射满足 $d \circ d = 0$ , 则称 $(X, d)$ 是微分双分次对象(differential bigraded object).

若 $(X, d)$ 是微分双分次对象,  $d$ 的阶数为 $(k, l)$ , 那么定义 $(X, d)$ 的上同调为

$$H(X, d)^{p,q} := \frac{\ker d^{p,q}}{\text{im } d^{p-k, q-l}}.$$

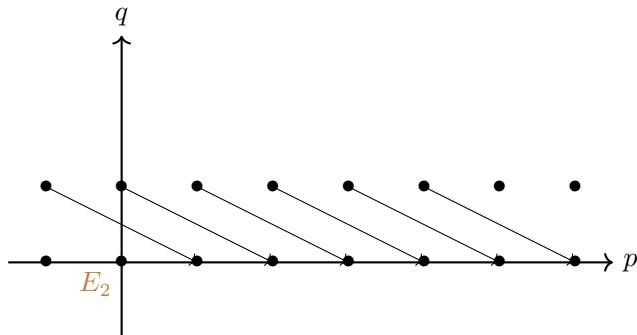
**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $\mathcal{A}$ 上的谱序列(spectral sequence) $(E_r, d_r)_{r \geq 0}$ 是一族 $\mathcal{A}$ 中的对象和态射的全体 $E = (E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ , 满足

1. 态射 $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ 定义在第 $r$ 页, 且是微分映射, 即 $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ .
2. 有同构

$$H^{p,q}(E_r) := \frac{\text{Ker } d_r^{p,q}}{\text{Im } d_r^{p+r, q-r+1}} \cong E_{r+1}^{p,q}.$$

推论3.2.1并没有给出第0页的描述, 但实际上它是存在的, 我们将会在后面讨论.

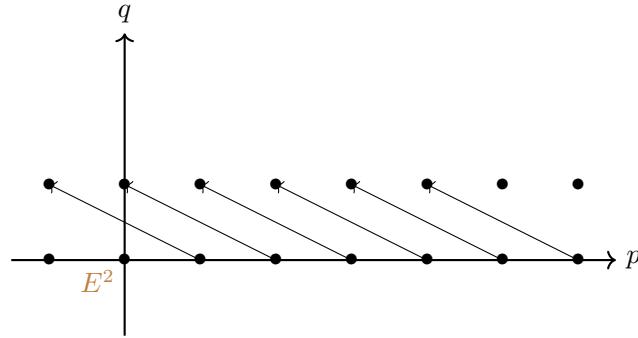
通常谱序列用图来表示更加容易, 这里我们画出了第一页第二页



和第三页

的情形.可以看到,微分映射的阶数是随着页数的变化而变化的.

如上定义是上同调谱序列的定义,对偶地还有同调谱序列



习题 3.1. 给定谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 0}$ ,  $p, q$  是给定的整数.求证若

### 3.2.2 收敛性

考虑  $\mathcal{A}$  中上链  $X^\bullet$  的一个滤子  $F_p X^\bullet$ , 将上同调函子作用在滤子上给出了图

$$\begin{array}{ccc}
 0 = F_{+\infty} X & 0 = H^n(F_{+\infty} X) & 0 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow \iota_{p+1} & \downarrow H^n(\iota_{p+1}) & \downarrow \\
 F_p X & H^n(F_p X) \xrightarrow{H^n(i_p)} \text{Im } H^n(i_p) & \\
 \downarrow \iota_p & \downarrow H^n(\iota_p) & \downarrow \\
 F_{p-1} X & H^n(F_{p-1} X) \xrightarrow{H^n(i_{p-1})} \text{Im } H^n(i_{p-1}) & \\
 \downarrow \iota_{p-1} & \downarrow H^n(\iota_{p-1}) & \downarrow \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 X = F_{-\infty} X & H^n(X) = H^n(F_{-\infty} X) & H^n(X),
 \end{array}$$

此时  $H^n(i_p)$  不再是单射,但考虑  $\text{Im } H^n(i_p)$  在  $H^n(X)$  中的像,我们有新的子对象关系(即上图的最右一列)

$$H^n(X) \supseteq \cdots \supseteq \text{Im } H^n(i_p) \supseteq \text{Im } H^n(i_{p+1}) \supseteq \cdots 0,$$

这意味着

$$\Phi_p H^n(X^\bullet) := \text{Im } H^n(i_p)$$

是  $H^n(X^\bullet)$  的一个滤子,称为  $F^p X^\bullet$  在  $H^*(X^\bullet)$  上的诱导滤子(derived filtration).

例 3.5. 给定正阶数的复形  $X^\bullet$ , 假定滤子

$$X \supseteq \cdots \supseteq F_n X \supseteq F_{n+1} X \supseteq \cdots 0.$$

满足  $F_p X = F_0 X = X$  对任意  $p < 0$  都成立，且  $F_p X = 0$  对任意  $p > 3$  都成立，

$$0 \rightarrow A_\infty \xrightarrow{i_\infty} A_\infty \xrightarrow{q_\infty} B_\infty \rightarrow 0,$$

若  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  是谱序列，那么  $E_2 = H(E_2, d_2)$  是  $E_1$  的子商： $E_2 := Z_2 / B_2$ . 同理我们知道  $E_3$  是  $E_2$  的子商，且

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots B_r \subseteq \cdots \subseteq Z_r \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq E_1.$$

**定义.** 给定谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ ，定义  $Z_\infty := \bigcap_{r \geq 1} Z_r$ ,  $B_\infty := \bigcup_{r \geq 1} B_r$ ，则谱序列的极限项(limit term)为

$$E_\infty^{p,q} := \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}}.$$

借用MacLane的描述， $Z^r$  是出现到第  $r$  页的对象， $B^r$  是被第  $r$  页限制的对象，而  $Z^\infty$  和  $B^\infty$  是一直出现和最终被限制的对象。

**引理 3.1.** 设  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  是谱序列，那么

1.  $E_{r+1} = E_r$  当且仅当  $Z_{r+1} = Z_r, B_{r+1} = B_r$ .
2. 若存在  $s$  使得对任意  $r \geq s$  都有  $E_{r+1} = E_r$ ，则  $E_\infty = E_s$ .

例 3.6.

**定义.** 设  $X^\bullet$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  上的上链， $F^p X^\bullet$  是上链的滤子。若  $\forall n \in \mathbb{Z}$  都能找到整数  $l(n)$  和  $u(n)$  使得  $F^{u(n)} X^n = 0$  且  $F^{l(n)} X^n = X^n$ ，则称滤子  $F^p X^\bullet$  是有界的(bounded)。

另一个相关的概念是一致有界

**定义.** 给定 Abel 范畴中的谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ ，若存在  $(p, q)$  分次对象  $H^n$  和  $H^n$  的有界滤子  $\Phi^p H^n$  满足

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{\Phi^p H^n}{\Phi^{p+1} H^n},$$

则称谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  收敛到 (converges to)  $H^n$ ，记为

$$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n.$$

换句话说，收敛性意味着所逼近的对象  $H^n$  上存在分次结构（有界递降滤子给出），使得谱序列的极限项按反对角线恰好对应该分次结构，即

$$\text{Gr } H^n := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\Phi^p H^n}{\Phi^{p+1} H^n} \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_\infty^{p,n-p}.$$

注意到此时并不是意味着谱序列极限项能完全确定  $H^n$ .

**定理 3.3.** *Abel范畴  $\mathcal{A}$  中的上链  $X^\bullet$  的有界滤子  $F^p X^\bullet$  给出的谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  都满足*

1. 对任意给定的  $p, q$  都存在  $r$  使得  $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ .
2.  $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$ .

证明. 考虑短正合序列

$$0 \rightarrow \bigoplus F^{p+1} X^\bullet \rightarrow \bigoplus F^p X^\bullet \rightarrow \bigoplus F^{p+1} X^\bullet / F^p X^\bullet \rightarrow 0,$$

Bott-Tu 14.6

这会最终使得正合对中的  $k : E \rightarrow D$  最终为 0,  $\square$

**命题 3.4.** *设  $X^{\bullet\bullet}$  是三象限双复形，且设  ${}^I E_r^{p,q}, {}^{II} E_r^{p,q}$  是  $\text{Tot}(X^{\bullet\bullet})$  的第一滤子和第二滤子所诱导的谱序列，那么*

1. 第一滤子和第二滤子都是有界的.
2. 对任意  $p, q$  都存在页数  $r = r(p, q)$  使得  ${}^I E_\infty^{p,q} = {}^I E_r^{p,q}, {}^{II} E_r^{p,q} = {}^{II} E_\infty^{p,q}$ .
3.  ${}^I E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$  且  ${}^{II} E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ .

虽然这个结果看上去很不错，但不论是符号上还是实际计算上这些都并不能够帮助我们.

### 3.3 全复形的上同调

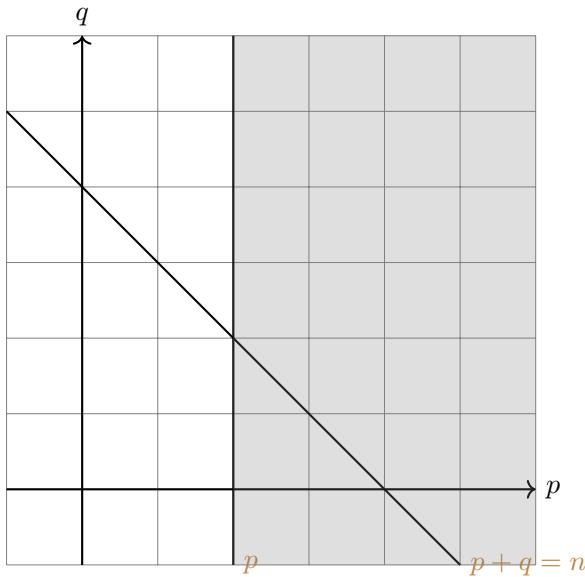
**定义.** 设  $M$  是双分次  $R$  模， $(M, d_I, d_{II})$  是一个双复形，那么称

$$({}^I F^p \text{Tot}(M))^n := \bigoplus_{i \geq p} M^{i,n-i} = \cdots \oplus M^{p+2,q-2} \oplus M^{p+1,q-1} \oplus M^{p,q}$$

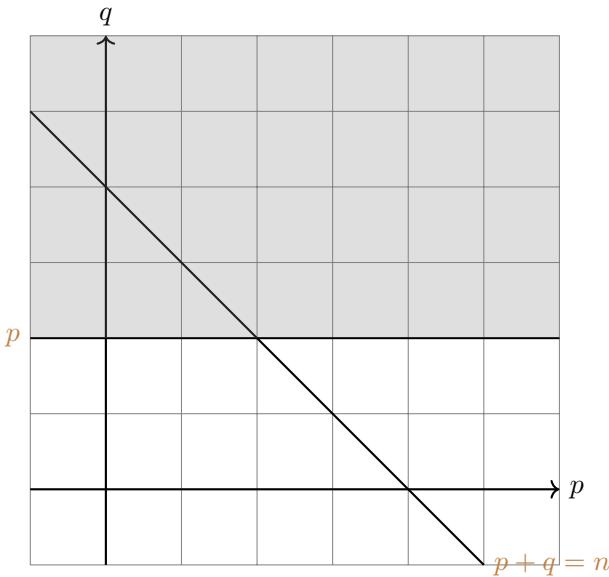
为  $\text{Tot}(M)$  的第一滤子 (the first filtration)，称

$$({}^{II} F^p \text{Tot}(M))^n := \bigoplus_{j \geq p} M^{n-j,j} = \cdots \oplus M^{p-2,q+2} \oplus M^{p-1,q+1} \oplus M^{p,q}$$

为  $\text{Tot}(M)$  的第二滤子 (the second filtration).



(a) 第一滤子



(b) 第二滤子

**定义.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$ , 称 $H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet}))$ 为 $X^{\bullet\bullet}$ 的第一上同调(the first iterated cohomology), 称 $H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet}))$ 为 $X^{\bullet\bullet}$ 的第二上同调(the second iterated cohomology).

**定理 3.5.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$ , 则

1.  ${}^I E_1^{p,q} = H_{II}^q(X^{p,\bullet})$ .
2.  ${}^I E_2^{p,q} = H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ .

对偶地, 我们同样有

**定理 3.6.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$ , 则

1.  ${}^{II} E_1^{p,q} = H_I^q(X^{\bullet,p})$ .
2.  ${}^{II} E_2^{p,q} = H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ .

**例 3.7.** 给定 $R$ 模范畴中的交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & Q \\ h \uparrow & & k \uparrow \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

做适当的变换我们得到一个三象限双复形  $X^{\bullet\bullet}$ , 我们考虑  $N, P$  都是  $Q$  的子模的特殊情形, 来计算该双复形的全复形

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\text{()}} P \oplus N \xrightarrow{g+k} Q$$

的上同调.

**定义.** 设  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  是 Abel 范畴中的谱序列, 若  $E_2^{p,q} = 0$  对所有非零的  $q$  都成立, 则称  $E_r$  落在  $p$  轴上 (collapses on the  $p$ -axis).

以第一滤子为例, 我们接下来会仔细分析双复形给出的谱序列的微分的含义. 考虑定理3.3中给出的短正合列 (Bott-Tu14)

$$E_1 = H_{\uparrow}(X^{\bullet,\bullet})$$

**命题 3.7.** 设  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  三象限谱序列, 且  $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$ , 若称  $E_r$  落在任意轴上, 则

1.  $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$  对任意  $p, q$  成立.
2. 若  $E_r$  落在  $p$  轴上, 则  $H^n(X^\bullet) = E_2^{n,0}$ ; 若  $E_r$  落在  $q$  轴上, 则  $H^n(X^\bullet) = E_2^{0,n}$ .

**定理 3.8.** 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的三象限谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ , 且  $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ , 则

1. 对任意  $n$  都存在满同态  $E_2^{n,0} \rightarrow E_\infty^{0,n}$  和单同态  $E_2^{0,n} \rightarrow E_\infty^{n,0}$ .
2. 对任意  $n$  都存在满同态  $E_\infty^{n,0} \rightarrow H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$  和单同态  $E_\infty^{0,n} \rightarrow H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ .
3. 存在正合序列

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet})) \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \rightarrow H^2(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$$

**例 3.8.** 给定 Abel 群的上链复形  $C^\bullet$ ,  $A^\bullet$  是  $C^\bullet$  的子复形, 考虑如下谱序列, 其中第 0 页为

$$\begin{array}{ccc}
 C^0/A^0 & & \\
 \downarrow & & \\
 C^1/A^1 & & A^0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C^2/A^2 & & A^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C^3/A^3 & & A^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

### 3.4 Cartan-Eilenberg预解

**定义.** 设  $X^\bullet$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  上的上链, 那么称

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow Z^n \rightarrow X^n &\xrightarrow{d^n} B^{n+1} \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow B^n \hookrightarrow Z^n \rightarrow H^n &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

为  $X^\bullet$  的基本短正合列(fundamental exact sequence). 若上链复形  $X^\bullet$  的基本短正合列都分裂, 则称  $X^\bullet$  分裂(split).

**定义.** 设  $X^\bullet$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  上的上链, 如果

$$0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow I^{0,\bullet} \rightarrow I^{1,\bullet} \rightarrow \dots$$

是整合列且对每个  $p$  以下每个整合列都是  $\mathcal{A}$  中的内射预解

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow X^p &\rightarrow I^{0,p} \rightarrow I^{1,p} \rightarrow \dots \\
 0 \rightarrow Z^p(X^\bullet) &\rightarrow Z^{0,p} \rightarrow Z^{1,p} \rightarrow \dots \\
 0 \rightarrow B^p(X^\bullet) &\rightarrow B^{0,p} \rightarrow B^{1,p} \rightarrow \dots \\
 0 \rightarrow H^p(X^\bullet) &\rightarrow H^{0,p} \rightarrow H^{1,p} \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

则称这是  $X^\bullet$  的一个 Cartan-Eilenberg 内射预解(Cartan-Eilenberg injective resolution).

**定理 3.9.** 若 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中包含有足够的内射对象, 则  $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$  中的每个上链复形都有 Cartan-Eilenberg 内射预解.

### 3.5 Kunneth谱序列

### 3.6 Grothendieck谱序列

**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴，且含有足够多的内射对象， $X$ 是 $\mathcal{A}$ 的对象， $F : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbf{Ab}$ 是加性函子. 若 $R^p F(X) = 0$ 对于任意 $p \geq 1$ 都成立，则称 $X$ 是右 $F$ 零调的(right  $F$ -acyclic).

**定理 3.10** (Grothendieck谱序列). 设 $F : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}, G : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{C}$ 是Abel范畴间的协变加性函子，且 $\mathcal{B}$ 中包含足够多的内射对象， $F$ 将 $\mathcal{A}$ 中的内射对象映为 $\mathcal{B}$ 中的右 $G$ 零调对象. 那么对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 $X$ ，存在第一象限的收敛谱序列

$$E_2^{p,q} := (R^p G \circ R^q F)(X) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(X).$$

证明. 选取 $X$ 在 $\mathcal{A}$ 中的一个内射预解

$$0 \rightarrow X \rightarrow J^1 \rightarrow J^2 \rightarrow \cdots,$$

于是我们得到 $\mathcal{B}$ 中的一个

□



# 第四章 导出范畴

在之前非常多的情形中，当求得一个上链后，我们只关心它的上同调，对于上同调相同而各项和微分可能不同的上链并不做区别.形式上说，上链之间的同构过分严格，拟同构才是合适的进行分类的等价关系.但是在范畴

$$\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$$

中，若态射  $f^\bullet$  是拟同构，它很难是同构，这就导致了很多问题，比如函子  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -)$  并不将拟同构映成拟同构.本章我们要建立形式化的语言，用同构的方式处理拟同构，也给导出函子建立更一般的框架.

## 4.1 范畴的局部化

**定理 4.1.** 设  $\mathcal{C}$  是一个范畴， $U$  是其中的一族态射，则存在同构下唯一的范畴  $\mathcal{C}[U^{-1}]$  和函子  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[U^{-1}]$ ，使得  $U$  中所有的态射都被  $Q$  映到  $\mathcal{C}[U^{-1}]$  中的同构，且满足如下泛性质：对任意范畴  $\mathcal{D}$  和任意函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ，若  $F$  将  $U$  中所有的态射映到  $\mathcal{D}$  中的同构，则有唯一的分解

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}[U^{-1}] \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & \mathcal{D}. \end{array}$$

我们称范畴  $\mathcal{C}[U^{-1}]$  为的  $\mathcal{C}$  局部化 (*localization*).

习题 4.1. 定义范畴  $\mathcal{D}$  满足  $\text{ob } \mathcal{D} = \text{ob } \mathbf{Ab}$ ,  $\text{hom}_{\mathcal{D}}(A, B) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes \mathbb{Q}, B \otimes \mathbb{Q})$ . 求证函子

$$\iota : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathcal{D}$$

$$M \mapsto M$$

$$(f : M \rightarrow N) \mapsto (f \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}} : M \otimes \mathbb{Q}, N \otimes \mathbb{Q})$$

是局部化.

这里需要注意，因为范畴中的一族态射  $U$  可以取得非常不理想，因此局部化之后的范畴可能并非再是局部小的.但这里我们忽略这样的问题，我们假定（虽然并不真实，但相较于主要问题，范畴本身的问题需要在其他的地方讨论）我们还是得到想要的范畴.

**定义.** 设 $U$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射, 满足如下条件:

1. 对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 $A$ ,  $\text{id}_A \in U$ , 且 $U$ 关于态射的复合封闭,
2. (扩张条件)对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : A \rightarrow B$ 和 $U$ 中的态射 $u : C \rightarrow B$ , 存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 $g : D \rightarrow C$ 和 $U$ 中的态射 $v : D \rightarrow A$ 使得

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & C \\ v \downarrow & & \downarrow u \\ A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

对偶地, 对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : B \rightarrow A$ 和 $U$ 中的态射 $u : B \rightarrow C$ , 存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 $g : C \rightarrow D$ 和 $U$ 中的态射 $v : A \rightarrow D$ 使得

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{g} & C \\ \uparrow v & & \uparrow u \\ A & \xleftarrow{f} & B, \end{array}$$

3. 对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f, g : A \rightrightarrows B$ , 存在 $u \in U$ 使得 $uf = ug$ 当且仅当存在 $v \in U$ 使得 $fv = gv$ ,

则称这一族态射 $U$ 是局部的(localizing).

**习题 4.2.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的满子范畴, 且 $\mathcal{B}$ 对求子对象和商对象封闭. 求证

$$U := \{f : X \rightarrow Y \mid \ker f, \text{coker } f \in \mathcal{B}\}$$

是局部态射族.

我们大费周章地考虑对求逆态射的限制条件, 重要的是当态射族 $U$ 满足这些条件时, 局部化范畴中的态射时非常容易描述的:

**引理 4.1.** 设 $U$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族局部态射, 那么 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 可以被如下地描述:  $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 的对象同于 $\mathcal{C}$ 中的对象,  $A \rightarrow B$ 的态射可以被描述为如下的图的等价类:

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ u \swarrow & & \searrow f \\ A & & B, \end{array}$$

其中,  $u \in U$ ,  $f : D \rightarrow B$ 是任意 $\mathcal{C}$ 中的态射, 记为 $\frac{f}{u}$ 或者 $fu^{-1}$ . 且 $\frac{f}{u}$ 等价于 $\frac{g}{v}$ 当且仅当存在 $\frac{h}{w}$ 使得如下图交换

$$\begin{array}{ccccc} & F & & E & \\ w \swarrow & & \searrow h & & \\ D & \xleftarrow{u} & \xrightarrow{v} & \xrightarrow{f} & \xrightarrow{g} B, \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \\ & & D & E & \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & F & & \end{array}$$

其中图中  $u, v, uw \in U$  (但  $w$  可能不在  $U$  中), 恒等态射是  $\text{id}_A = \frac{\text{id}_A}{\text{id}_A}$ . 最后, 根据定义中的扩张条件,  $\frac{f}{u} : A \rightarrow B$  与  $\frac{g}{v} : B \rightarrow C$  的复合是

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & F & & \\
 & w \swarrow & & \searrow h & \\
 D & & E & & \\
 u \swarrow & f \searrow & v \swarrow & g \searrow & \\
 A & & B & & C
 \end{array} & \Rightarrow & 
 \begin{array}{ccc}
 & F & \\
 uw \swarrow & & \searrow gh \\
 A & & C.
 \end{array}
 \end{array}$$

证明. 我们首先验证如上定义了一个等价关系. 自反性是考虑下图

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \\
 \text{id}_D \swarrow & & \searrow \text{id}_D \\
 D & & D \\
 u \swarrow & u \searrow & f \searrow & f \searrow \\
 A & & & B,
 \end{array}$$

对称性是已知

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 w \swarrow & & \searrow h \\
 D & & E \\
 u \swarrow & v \searrow & f \searrow & g \searrow \\
 A & & & B,
 \end{array}$$

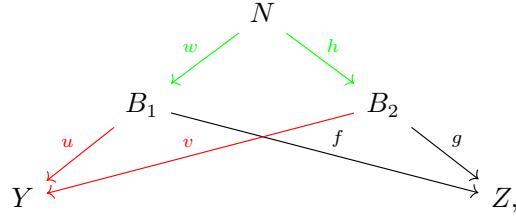
其中按定义  $vh = uw \in U$ , 于是

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 h \swarrow & & \searrow w \\
 E & & D \\
 v \swarrow & u \searrow & g \searrow & f \searrow \\
 A & & & B,
 \end{array}$$

给出了等价关系. 接下来是传递性, 给定  $X \rightarrow Y$  的等价代表元

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 w \swarrow & & \searrow h \\
 A_1 & & A_2 \\
 u \swarrow & v \searrow & f \searrow & g \searrow \\
 X & & & Y
 \end{array}$$

和  $Y \rightarrow Z$  的等价代表元



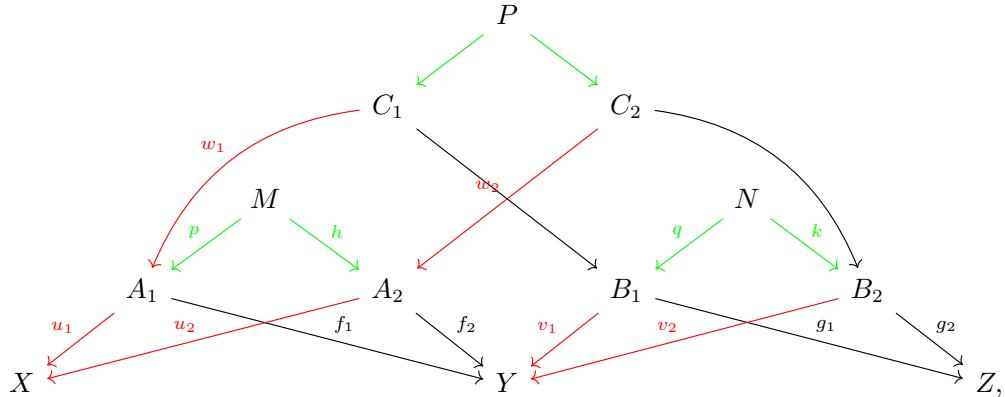
为方便读图, 红色表示 $U$ 中的态射, 绿色表示复合特定 $U$ 中的态射后是 $U$ 中的态射 (例如 $w$ 本身不是 $U$ 中的态射但 $uw$ 是 $U$ 中的态射), 于是根据扩张条件可以找到 $C_1, C_2$ 使得交换图

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \longrightarrow & B_1 \\ \downarrow w_1 & & \downarrow v_1 \\ A_1 & \xrightarrow{f_1} & Y \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccc} C_2 & \longrightarrow & B_2 \\ \downarrow w_2 & & \downarrow v_2 \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

成立, 这是在不同代表元下的复合. 我们希望找到对象 $P$ 给出交换图



进而说明复合 $[X \leftarrow C_1 \rightarrow Z]$ 与 $[X \leftarrow C_2 \rightarrow Z]$ 是等价的. 再次根据扩张条件可以找到

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \longrightarrow & C_1 \\ \downarrow & & \downarrow u_1 w_1 \\ M & \xrightarrow{u_1 p} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Q_2 & \longrightarrow & Q_1 \\ \downarrow & & \downarrow u_1 w_1 \\ N & \xrightarrow{u_1 p} & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow w_2 \\ Q_2 & \xrightarrow{u_1 p} & A_2 \end{array}$$

接下来我们要验证态射的复合不依赖于代表元的选取.

最后我们验证这样构造的范畴具有相应的泛性质, 因而这个范畴是我们希望的局部化. 首先, 存在自然的局部化函子

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C}[U^{-1}] \\ A &\mapsto A \\ (f : A \rightarrow B) &\mapsto \frac{f}{\text{id}_A}, \end{aligned}$$

这样对于任意的  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , 若  $F$  将  $U$  中所有的态射映到  $\mathcal{D}$  中的同构, 可以定义

$$\begin{aligned} \bar{F} : \mathcal{C}[U^{-1}] &\rightarrow \mathcal{D} \\ A &\mapsto F(A) \\ \frac{f}{u} &\mapsto F(f)F(u)^{-1}, \end{aligned}$$

(这里的顺序是重要的: )

□

习题 4.3. 验证证明中给出的  $Q$  是函子.

**定理 4.2.** 设  $U$  是加性范畴  $\mathcal{C}$  中的一族局部态射, 那么  $\mathcal{C}[U^{-1}]$  也是加性范畴.

但是, 我们希望研究的情形非常不幸地不满足这些局部的条件: 对于 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  的上链复形范畴  $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ , 拟同构不是局部的 (习题???) . 下一节我们将用合适的方式处理这个问题, 使得我们这节建立的理论起到作用. 结束之前, 我们引入如下命题, 在之后考虑有界复形时它会给我们理想的结果.

**命题 4.3.** 设  $U$  是范畴  $\mathcal{C}$  中的一族局部态射,  $\mathcal{D}$  是  $\mathcal{C}$  的满子范畴, 如果  $U_{\mathcal{D}} := U \cap \text{mor } \mathcal{D}$  是  $\mathcal{D}$  的局部态射, 且如下的条件满足一条

1. 对任意  $U$  中的态射  $u : C \rightarrow D$ , 若  $D \in \text{ob } \mathcal{D}$ , 则一定存在  $B \in \text{ob } \mathcal{D}$  和态射  $f : B \rightarrow C$  使得  $u \circ f \in U$ ,
- 2.

那么  $\mathcal{D}[U_{\mathcal{D}}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{C}[U^{-1}]$  是一个满忠实的嵌入.

本节的最后, 我们讨论局部性与 Serre 子范畴之间的关系. 练习

## 4.2 同伦范畴与导出范畴

**引理 4.2.** 设  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴,  $D(\mathcal{A}) := \text{Com}^\bullet(\mathcal{A})[Qiso^{-1}]$ , 且设  $Q : \text{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$  是局部化函子. 求证 若  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  链同伦与  $\text{id}_X$ , 那么在  $D(\mathcal{A})$  中  $Q(f) = \text{id}_X$ .

证明. 我们先假定如下事实: □

**定义.** 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$ , 定义  $\mathcal{A}$  的同伦范畴(homotopy category)  $K(\mathcal{A})$  如下:

1.  $\text{ob } K(\mathcal{A}) = \text{ob Com}^\bullet(\mathcal{A})$ ,
2. 对任意  $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{ob Com}^\bullet(\mathcal{A})$ ,  $\text{hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{hom}_{\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\simeq$ .

**定理 4.4.** 对 Abel 范畴  $\mathcal{A}$ ,  $* = +, -, b, \bullet$ , 那么

1.  $f \in \text{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$  是同构当且仅当它可以被图

$$\begin{array}{ccc} & Z^\bullet & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{array}$$

表示, 且图中的两个态射都是拟同构.

2.  $f \in \text{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$  且  $Q(f) = 0$ , 那么  $f^n : H^n(X^\bullet) \rightarrow H^n(Y^\bullet) = 0$  对任意  $n \in \mathbb{Z}$  成立.
3. 嵌入函子  $[0] : \mathcal{A} \rightarrow D^*(\mathcal{A})$  是满忠实的, 即存在集合的同构

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X[0], Y[0]).$$

**命题 4.5.** 若  $X^\bullet$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  上的零调复形,  $I^\bullet$  是内射复形, 那么

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) = 0.$$

**命题 4.6.** 若  $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  是拟同构,  $I^\bullet$  是内射复形, 那么

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y^\bullet, I^\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

**推论 4.6.1.**

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) \rightarrow \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

**定义.**

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) :=$$

**定理 4.7.**

### 4.3 三角范畴

**定义.** 给定加性范畴  $\mathcal{D}$ , 如果在  $\mathcal{D}$  上存在如下信息

1. 加性自同构  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , 它被称为平移函子(translation functor), 通常对于对象  $X \in \mathcal{D}$ , 记  $X[1] := T(X)$ ,
2. 一族被称为特异三角(distinguished triangle)的图

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

和特异三角间的态射

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & \xrightarrow{l} & A[1], \end{array}$$

满足以下公理:

TR 1. (a)  $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$  是特异三角;

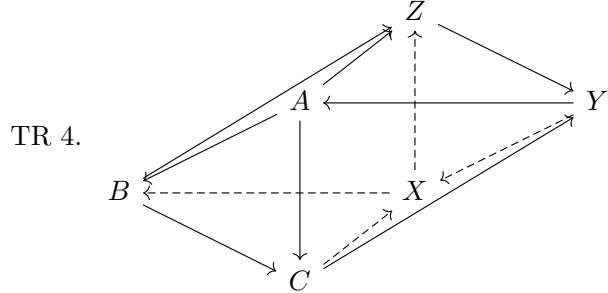
(b) 任意同构于特异三角的图都是特异三角 (特异三角在同构下封闭);

(c) 任意态射  $X \xrightarrow{u} Y$  都可以扩张为一个特异三角  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ .

TR 2. 若  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  是特异三角, 那么  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$  也是特异三角.

TR 3. 给定两个特异三角  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  和  $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} A[1]$ , 若存在  $f : X \rightarrow A$  和  $g : Y \rightarrow B$  使得  $g \circ u = j \circ f$ , 那么存在 (不要求唯一) 的态射  $h : Z \rightarrow C$  构成特异三角间的态射

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & \xrightarrow{l} & A[1]. \end{array}$$



则称 $\mathcal{D}$ 是一个三角范畴(triangulated category).若只有前三条公理成立，则称 $\mathcal{D}$ 是预三角范畴(pre-triangulated categories).

习题 4.4. 若 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角，求证 $v \circ u, w \circ v, (-u[1]) \circ w$ 都是零态射.

习题 4.5. 若

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & \xrightarrow{l} & A[1], \end{array}$$

是特异三角间的态射，且 $f, g$ 都是同构，求证 $h$ 也是同构.

**定义.** 给定(预)三角范畴 $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ ，若函子 $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 和自然态射 $\eta : F(-[1]) \Rightarrow F(-)[1]$ 满足对任意 $\mathcal{D}$ 中的特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

都能得到 $\mathcal{E}$ 中的特异三角

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\eta_X \circ F(w)} F(X)[1],$$

则称函子 $F$ 是正合的(exact)或三角的(triangulated).

**定义.** 给定(预)三角范畴 $\mathcal{D}$ 和Abel范畴 $\mathcal{A}$ ，若加性协变函子 $H$ 将特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

映为 $\mathcal{A}$ 中的正合序列

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z) \xrightarrow{H(w)} H(X[1]),$$

则称函子 $H$ 是上同调的(cohomological).若加性反变函子 $H : \mathcal{D}^\circ \rightarrow \mathcal{A}$ 对应的函子 $H^\circ : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}^\circ$ 是上同调的, 则称 $H$ 是反变同调的.

通常对于上同调函子, 记 $H^n(X) := H(X[n])$ , 于是 $H^0(X) := H(X)$ .于是, TR2说明给定一个特异三角就可以得到一个 $\mathcal{A}$ 中的长正合序列.

**定义.** 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和Abel范畴 $\mathcal{A}$ , 若函子 $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ 满足对任意 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

都存在自然的同构 $\delta_{X \rightarrow Y \rightarrow Z}$ 使得

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{\delta_{X \rightarrow Y \rightarrow Z}} X[1]$$

是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角, 则称 $G$ 是 $\delta$ 函子( $\delta$ -functor).自然性意味着短正合序列的态射

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \end{array}$$

给出特异三角的态射

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \xrightarrow{\delta_{X \rightarrow Y \rightarrow Z}} X[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \xrightarrow{\delta_{A \rightarrow B \rightarrow C}} A[1]. \end{array}$$

### 4.3.1 同伦范畴

### 4.3.2 导出范畴

**命题 4.8.** 对Abel范畴 $\mathcal{A}$ ,  $\text{Com}^*(\mathcal{A})$ 中的短正合列

$$0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow 0$$

诱导了 $D^*(\mathcal{A})$ 中的特异三角.

### 4.3.3 生成元

**定义.** 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和对象 $E$ , 若 $\mathcal{D}$ 中包含 $E$ 的最小的saturated满三角子范畴是 $\mathcal{D}$ , 或者换句话说 $\langle E \rangle = \mathcal{D}$ , 则称 $E$ 是典型生成元(classical generator).

**定义.** 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和对象 $E$ ,

1. 若存在正整数 $n$ 使得 $\langle E \rangle_n = \mathcal{D}$ , 则称 $E$ 是强生成元(strong generator).
2. 若 $\text{Hom}(E, X[n]) = 0$ 对任意整数 $n$ 都成立意味着 $X \cong 0$ , 则称 $E$ 是弱生成元(weak generator).

## 4.4 导出函子

给定Abel范畴间的函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 它自然诱导了函子 $\text{Com}^\bullet(F) : \text{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Com}^\bullet(\mathcal{B})$ 和 $K(F) : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$ . 由于 $F$ 与平移函子交换, 诱导的函子保持范畴上面的三角结构. 自然地我们会希望 $F$ 诱导了导出范畴上的正合函子. 在函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 本身是正合函子时, 这是没问题的 (命题4.9), 但一般情形 $K(F)$ 不将拟同构映为拟同构. 不过退一步, 当 $F$ 是左正合或右正合时, 在适当的情形我们可以找到相应的构造使得有对应诱导的函子.

在先前的章节中我们讨论过这个论题, 这里我们用导出范畴的角度来定义导出函子, 具体来说, 给定一个Abel范畴的左(对应的, 右)正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 在一定的情况下存在一个扩张函子 $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$  (对应的,  $LF : D^-(\mathcal{A}) \rightarrow D^-(\mathcal{B})$ ), 称为 $F$ 的右导出函子(right derived functor).

**命题 4.9.** 设Abel范畴间的函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是正合的, 那么

1.  $K^*(F)$ 将拟同构映到拟同构, 因此它诱导了函子 $D^*(F) : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{B})$ ,
2.  $D^*(F)$ 是正合函子, 即它将特异三角映到特异三角.

**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $\mathcal{R} \subseteq \text{Ob } \mathcal{A}$ 是一族对象, 对给定的左(右)正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 满足

1.  $F$ 将 $K^+(\mathcal{R})$  ( $K^-(\mathcal{R})$ ) 中的零调序列映到零调序列,
2.  $\mathcal{A}$ 中的任意对象都是 $\mathcal{R}$ 中对象的子对象(商对象),

则称 $\mathcal{R}$ 是适应于 $F$ 的对象族(adapted to  $F$ ).

**例 4.1.** 给定 $R$ 模 $M$ , 对函子 $M \otimes_R -$ , 所有的平坦 $R$ 模就是适应于该函子的一族对象.

**定理 4.10.** 设  $\mathcal{R}$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中适应于左正合函子  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  的对象，令  $U_{\mathcal{R}}$  为  $K^+(\mathcal{R})$  中的拟同构，那么  $U_{\mathcal{R}}$  在  $K^+(\mathcal{R})$  中是局部的，且自然的函子

$$K^+(\mathcal{R})[U_{\mathcal{R}}^{-1}] \rightarrow D^+(\mathcal{A})$$

是范畴的等价。

给定一个左正合函子  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ，我们回顾一下经典意义下导出函子的构造，以  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -)$  为例：这是一个左正合函子，为了求得它的右导出函子  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(M, -)$ ，首先取给定的 Abel 群  $N$  的内射消解  $I^\bullet$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots, \end{array}$$

再用  $I^\bullet$  代替  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -)$  中原本的  $N$ ，得到上链

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I^0) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I^1) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I^2) \longrightarrow \cdots,$$

它在  $D^+(\mathbf{Ab})$  中的像即是导出函子的像。这相当于选取一个范畴的同构（后面会说明如同经典情况的构造，不依赖于这个同构的选取）

$$P : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow K^+(\mathcal{R})[U_{\mathcal{R}}^{-1}],$$

然后

$$R\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, P(-))$$

就是要找的导出函子。

**定义.** 对于左正合函子  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ，存在如下的图

$$\begin{array}{ccccc} K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{Q_B} & D^+(\mathcal{B}) \\ & \searrow Q_A & & & \\ & & D^+(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

若有函子  $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$  和自然态射  $\eta : Q_B \circ K^+(F) \Rightarrow RF \circ Q_A$

$$\begin{array}{ccccc} K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{Q_B} & D^+(\mathcal{B}) \\ & \searrow Q_A & \downarrow \eta & \nearrow RF & \\ & & D^+(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

使得任意函子  $G : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$  和自然态射  $\xi : Q_B \circ K^+(F) \Rightarrow RF \circ Q_A$

$$\begin{array}{ccccc} K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{Q_B} & D^+(\mathcal{B}) \\ & \searrow Q_A & \Downarrow \xi & \nearrow G & \\ & & D^+(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

都存在唯一的自然变换 $\delta$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{Q_B} & D^+(\mathcal{B}) \\
 Q_A \searrow & & RF \nearrow & \parallel & \nearrow G \\
 & & D^+(\mathcal{A}), & \delta \Downarrow &
 \end{array}$$

则称 $RF$ 是 $F$ 的右导出函子(right derived functor).

以上定义的交换图说明，一个左正合函子的右导出函子是对应图的左Kan扩张.根据Kan扩张的唯一性，导出函子若存在则一定唯一，这个事实对下面定理的证明非常关键.

**定理 4.11.** 假设左正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 有适应于 $F$ 的对象族 $\mathcal{R}$ ，那么 $RF$ 存在且同构下唯一.

## 4.5 例子

给定环 $R$ 和 $M \in \mathbf{Mod}-R$ ，函子

$$M \otimes_R - : R-\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

是右正合的，

# 第五章 层及其上同调

## 5.1 层的基本理论

在几何中，我们经常遇到从局部性质到整体性质的过渡，例如我们在讲光滑函数时对光滑性的定义是局部的，但光滑性可以是整体的性质；任意一个流形都是局部可定向的，但一个流形并不一定是整体可定向的。在从局部到整体的过渡中，我们通常使用的方法是局部坐标，当局部坐标满足一定性质时我们可以找到更大的坐标，这个更大的坐标限制到小的坐标上与原来小的坐标有相同的性质。如果将这样的过程抽象出来就是层的构造。

### 5.1.1 预层与层的基本性质

**定义.** 设 $X$ 是一个拓扑空间。对 $X$ 的每个开集 $U$ ，我们赋予其一个Abel群 $\mathcal{F}(U)$ ，并且对任意满足 $V \subseteq U$ 的开集 $U, V$ ，存在映射 $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ ，满足如下条件：

- (i)  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ ;
- (ii)  $\rho_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ ;
- (iii) 对所有满足 $W \subseteq V \subseteq U$ 的开集 $U, V, W$ ， $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ ;

这样的在拓扑空间 $X$ 上的结构 $\mathcal{F}$ 我们称为预层(presheaf)， $\mathcal{F}(U)$ 中的元素称为开集 $U$ 的截面(section)，映射 $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ 称为限制映射(restriction map)。

例 5.1. 设 $X$ 是一个复流形， $\mathcal{M}$ 是如下定义的亚纯函数层(sheaf of meromorphic functions)

$$\mathcal{M}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 是亚纯的}\},$$

且对于任意 $f \in \mathcal{M}(U)$ 和开集 $V \subseteq U$ ，定义 $\rho_V^U(f)$ 是 $f$ 在 $V$ 上的限制，则 $\mathcal{M}$ 是 $X$ 上的预层。

在上面的例子中，预层 $\mathcal{M}$ 的限制同态确实是函数的限制——但通常而言，限制同态可以是任意的映射。对于元素 $s \in \mathcal{F}(U)$ ，我们也用通常的限制记号： $s|_V := \rho_V^U(s)$ ，然而这一般与真正函数的限制很不同。

注意到任意的拓扑空间 $X$ 可以自然地成为一个范畴 $\mathbf{Open}(X)$ ，这样每个预层都是一个反变函子 $\mathbf{Open}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$ ，可以想到的是，我们并不需要将函子的值域限定为 $\mathbf{Ab}$ ，其他任意合理的范畴都可以得到有用的预层。当值域范畴为 $\mathbf{Ab}$ 、 $\mathbf{Ring}$ 、 $R - \mathbf{Mod}$ 时，我们分别称 $\mathcal{F}$ 为 $X$ 上的Abel群预层、环预层和 $R$ 模预层。

这种对于预层的理解还有其他的好处——我们可以非常容易地定义预层之间的态射(morphism)——一个预层的态射就是函子间的自然变换.如果我们显式地将预层态射 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 的定义写出来, 即是对任意 $X$ 中的开集 $V \subseteq U$ , 我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \theta_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V), \end{array}$$

其中 $\rho_V^U, \theta_V^U$ 分别是预层 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的限制映射.这样对于拓扑空间 $X$ , 我们得到了一个范畴 $\mathbf{PShAb}(X)$ , 其对象是 $X$ 上的Abel群预层, 态射是预层的态射.

例 5.2. 设 $X$ 是任意的拓扑空间,  $M$ 是任意的Abel群, 对开集 $U$ 定义 $M_X(U) = M$ 对于满足 $V \subseteq U$ 的开集, 限制映射都是恒等映射, 则 $M_X$ 是一个预层, 称为常预层(constant sheaf).如果 $N$ 也是一个Abel群,  $\varphi : M \rightarrow N$ 是群同态, 则我们自然地有预层的映射

$$\varphi_X : M_X \rightarrow N_X,$$

定义为

$$(\varphi_X)_U := \varphi : M_X(U) \rightarrow N_X(U).$$

例 5.3.

例 5.4.

预层的结构中蕴含了空间上“函数”的很多局部信息, 对于一个预层我们有专门的结构刻画这样的信息:

**定义.** 设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的预层, 那么称

$$\mathcal{F}_x := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ x \in U}} \mathcal{F}(U)$$

为 $\mathcal{F}$ 在点 $x$ 处的茎(stalk), 其中 $U$ 取遍所有包含点 $x$ 的开集, 正向系中的态射由限制态射给定.

根据正极限的定义, 对于任意包含 $x$ 的开集 $U$ , 存在自然的态射 $\rho_x^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ 使得与正向系相容, 即对于满足 $V \subseteq U$ 的开集,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & & \\ \rho_V^U \downarrow & \searrow \rho_x^U & \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_x^V} & \mathcal{F}_x. \end{array}$$

为简化记号, 通常对于截面 $s \in \mathcal{F}(U)$ , 我们记 $s_x := \rho_x^U(s)$ .同样地, 余极限的函子性告诉我们, 对于任意 $X$ 中的点 $x$ , 若 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层间的态射, 那么有诱导的点 $x$ 处茎的态射

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$

使得对任意开集 $U$ 有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ (\rho_{\mathcal{F}})_x^U \downarrow & & \downarrow (\rho_{\mathcal{G}})_x^U \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathcal{G}_x, \end{array}$$

因此，我们有  $\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x$ .

习题 5.1. 证明我们有如下的显式构造：

$$\mathcal{F}_x \cong \left( \prod_{x \in U} \mathcal{F}(U) \right) / \sim,$$

其中，若  $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(V)$  的等价关系  $s \sim t$  定义为存在包含于  $U \cap V$  的  $x$  的邻域  $W$  使得  $s|_W = t|_W$ .

习题 5.2. 设  $U$  是  $X$  中包含点  $x$  的开集，求证

$$\mathcal{F}_x \cong (\mathcal{F}|_U)_x.$$

证明. 我们证明  $\mathcal{F}_x$  满足  $(\mathcal{F}|_U)_x$  的泛性质，那么根据唯一性二者必然同构.

一方面， $U$  中任意包含  $x$  的开集  $W$  满足

$$\mathcal{F}|_U(W) = \mathcal{F}(W),$$

这自然地继承了与限制态射相容的态射  $\mathcal{F}|_U(W) \rightarrow \mathcal{F}_x$ . 另一方面，对任意开集  $V \subseteq X$ ，给定与  $\text{Open}(U)$  相容的对象  $\{A, \{\lambda_W : \mathcal{F}(W) \rightarrow A\}_{\{W \subseteq U\}}\}$ ，限制态射  $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V \cap U)$  使得它成为与  $\text{Open}(X)$  相容的对象，因此根据泛性质存在唯一的态射  $\mathcal{F}_x \rightarrow A$  与  $\text{Open}(X)$  中的限制态射相容，因而与与  $\text{Open}(U)$  相容，这恰是  $(\mathcal{F}|_U)_x$  的泛性质.  $\square$

例 5.5. 设  $M$  是给定的 Abel 群， $x \in X$  是拓扑空间中的一个点，定义预层  $M(x)$  满足

$$M(x)(U) := \begin{cases} M & x \in U \\ 0 & x \notin U, \end{cases}$$

限制态射要么是恒等映射要么是零映射. 如果我们计算  $M(x)$  在点  $y$  的茎，

但是，预层并不是我们所希望的定义在拓扑空间上的代数结构. 多数情况下我们希望的是从局部的信息中可以得到足够的整体信息，并且整体能够得到的信息一定程度上完全由局部信息得到，于是我们有下面的定义：

**定义.** 设  $\mathcal{F}$  是拓扑空间  $X$  上的预层，如果  $\mathcal{F}$  满足如下条件：

- (i) (局部性(locality)) 若  $\{U_i\}_{i \in I}$  是开集  $U$  的一族开覆盖， $s, t \in \mathcal{F}(U)$  满足对于任意  $i \in I$  都有  $s|_{U_i} = t|_{U_i}$  成立，则  $s = t \in \mathcal{F}(U)$ ；
- (ii) (粘合条件(gluing)) 若  $\{U_i\}_{i \in I}$  是开集  $U$  的一族开覆盖，一族元素  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  满足  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ ，那么存在  $s \in \mathcal{F}(U)$  使得  $s|_{U_i} = s_i$  成立；

则称  $\mathcal{F}$  为  $X$  上的层(sheaf).

定义的合理性告诉我们并不是所有的预层都是层，对于某些拓扑空间 $X$ ，常预层就不是层。但是，某些定义的预层本身就是层，如下例最重要的是层的行为形态非常类似于全体可定义的函数，因此函数的全体必然是层。

例 5.6. 例5.1中的构造是一个层，更一般地，如果 $X$ 是拓扑空间， $\mathcal{F}$ 是定义在 $X$ 上满足某些性质（诸如连续、全纯、光滑等等）的函数预层，且限制映射就是函数的限制，那么这个预层是层。

例 5.7. 若 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的预层， $U$ 是开集，那么我们可以定义 $\mathcal{F}$ 在 $U$ 上的限制，记为 $\mathcal{F}|_U$ ，它是 $U$ 上的层，对任意 $U$ 中的开集 $V$ ，定义

$$\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(U \cap V) = \mathcal{F}(V),$$

且对应 $W \subseteq V$ 的限制同态 $\mathcal{F}|_U(V) \rightarrow \mathcal{F}|_U(W)$ 定义为限制同态 $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W)$ 。明显的事是， $\mathcal{F}|_U(V) \rightarrow \mathcal{F}|_U(W)$ 是预层，并且如果 $\mathcal{F}$ 是层则 $\mathcal{F}|_U(V) \rightarrow \mathcal{F}|_U(W)$ 也是层。

更抽象一些地，我们可以用范畴的语言描述层公理：若 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是开集 $U$ 的一族开覆盖，那么层公理等价于下图

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{p} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j),$$

是一个等值子（equalizer），其中第一个态射由 $\rho_{U_i}^U = \mathcal{F}(U_i \hookrightarrow U)$ 诱导， $f, g : \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ 分别由 $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i} \circ \pi_i : \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ 和 $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_j} \circ \pi_j : \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_j) \rightarrow \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ 诱导。

习题 5.3. 证明上述等价性。

证明. 根据范畴中乘积对象的泛性质， $p, f, g$ 的映射完全由 $\pi_i \circ p, \pi_{i,j} \circ f, \pi_{i,j} \circ g$ 决定。

假设 $\mathcal{F}$ 是层，且我们能找到集合间的映射 $q : A \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ 使得 $f \circ q = g \circ q$ ，于是对任意 $A$ 中的元素 $a$ ， $\pi_{i,j} \circ f \circ q(a) = \pi_{i,j} \circ g \circ q(a)$ ，这意味着对于 $U_i$ ，我们能找到 $\mathcal{F}(U_i)$ 中的元素 $\pi_i \circ q(a)$ 使得

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(\pi_i \circ q(a)) = \pi_{i,j} \circ f \circ q(a) = \pi_{i,j} \circ g \circ q(a) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(\pi_i \circ q(a)),$$

故由层的定义，存在唯一的元素 $\tilde{q}(a) \in \mathcal{F}(U)$ 使得

$$\rho_{U_i}^U(\tilde{q}(a)) = \pi_i \circ q(a),$$

即存在唯一的集合间的映射 $\tilde{q} : A \rightarrow \mathcal{F}(U)$ 满足 $q = p \circ \tilde{q}$ ，故 $\mathcal{F}(U)$ 是等值子。

反过来，设 $\mathcal{F}(U)$ 是 $f, g$ 的等值子，若在每个 $i \in I$ ， $\mathcal{F}(U_i)$ 中都有元素 $s_i$ 满足 $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ ，根据乘积结构的泛性质，这意味着在 $\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ 中存在元素 $\{s_i\}_{i \in I}$ 满足

$$\pi_{i,j} \circ f(\{s_i\}_{i \in I}) = s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} = \pi_{i,j} \circ g(\{s_i\}_{i \in I}),$$

故 $f(\{s_i\}_{i \in I}) = g(\{s_i\}_{i \in I})$ 。根据集合范畴中等值子的构造，存在唯一的 $s \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $p(s) = \{s_i\}_{i \in I}$ ，因此

$$s|_{U_i} = \pi_i \circ p(s) = s_i,$$

$\mathcal{F}$ 是层。 □

层之间的态射与预层之间态射的定义相同，即对于层 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ ， $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是层态射当且仅当 $\varphi$ 是预层的态射。这意味着我们可以定义范畴 $\mathbf{ShAb}(X)$ ，且它是 $\mathbf{PShAb}(X)$ 的满子范畴。在之后的内容我们会看到，当我们选取的范畴 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴时， $\mathbf{PSh}\mathcal{A}(X)$ 也是一个Abel范畴。

局部性可以用茎的语言来描述：

**命题 5.1.** 设  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是拓扑空间  $X$  上层的态射，那么  $\varphi$  是同构当且仅当对于任意  $x \in X$ ，诱导的  $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  都是同构。

对层这种构造的一种理解方式是说，它是弯曲空间上满足一定性质的“函数”的全体，不同性质的选取决定了层结构的不同。

**习题 5.4.** 设  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{G}$  是  $X$  上的两个预层，验证  $U \mapsto \text{hom}_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  有自然的预层结构，且若  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{G}$  还是  $X$  上的层，则预层  $U \mapsto \text{hom}_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  是层，记为  $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ，称作  $\mathcal{F}$  到  $\mathcal{G}$  的局部态射层(sheaf of local morphisms of  $\mathcal{F}$  into  $\mathcal{G}$ )。

**习题 5.5.** 设  $\mathcal{F}$  是拓扑空间  $X$  上的一个预层，则下面的构造给出一个拓扑空间，其中底集  $\tilde{\mathcal{F}} = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{(x, s_x) \mid x \in X, s_x \in \mathcal{F}_x\}$  是所有茎的不交并，并对任意给定  $X$  中的开集  $U$  和  $s \in \mathcal{F}(U)$  给定如下一组拓扑基

$$(U, s) := \{(x, s_x) \mid x \in U\}.$$

求证：

- (i) 存在自然的连续映射  $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ ，将点  $(x, s_x)$  映到  $x$ 。并且，对任意的开集  $U$  和  $s \in \mathcal{F}(U)$ ，存在  $\pi$  在  $U$  上的截面(section)  $\sigma : U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ （截面是指连续函数  $\sigma$  使得  $\pi \circ \sigma$  是  $U$  上的恒等函数）。记对应  $\mathcal{F}$  的  $U$  上所有截面为  $\Gamma(U, \mathcal{F})$ 。
- (ii) 反之，若  $\mathcal{F}$  还是层，求证任意  $U$  上的截面  $\sigma$  都是如上述方式构造的。
- (iii) 由上证明若  $\mathcal{F}$  是层，则  $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$  的连续函数截面层同构于  $\mathcal{F}$ 。
- (iv) 若  $\mathcal{G}$  也是拓扑空间  $X$  上的一个预层， $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是预层的态射，证明  $\varphi$  诱导了  $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  的连续映射。

空间  $\tilde{\mathcal{F}}$  称为预层  $\mathcal{F}$  的平展空间(étale space)。这实际上是 Serre 最初给的层的定义，我们用的是更现代的观点来看，但习题说明了两者是完全相同的。

*Solution.* (i) 根据定义， $\pi$  显然是连续的。定义  $\sigma : x \mapsto (x, s_x)$ ，注意到  $\sigma^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \sigma^{-1}(A_i)$ ，因而为证明  $\sigma$  是连续的只需要证明对任意的  $X$  中的开集  $V$ ， $\sigma^{-1}((V, t))$  也是开集即可。但是若  $t = s$  则  $\sigma^{-1}((V, t)) = \sigma^{-1}((V, s)) = V \cap U$ ，若  $t \neq s$  则  $\sigma^{-1}((V, t)) = \emptyset$ 。故得证。

(ii) 设  $\sigma : U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$  是  $U$  上的截面，于是对于任意的  $x \in U$ ，存在  $s \in \mathcal{F}(U)$  使得  $\sigma(x) = (x, s_x)$ 。若  $x, y$  是  $U$  中的两个点， $\sigma(x) = (x, s_x)$  且  $\sigma(y) = (y, t_y)$ 。根据芽的定义，我们可以找到  $x, y$  的邻域  $V, W$  使得  $s \in \mathcal{F}(V), t \in \mathcal{F}(W)$ 。考虑开集

$$(V, s) = \{(z, s_z) \mid z \in V\}$$

和

$$(W, t) = \{(z, t_z) \mid z \in W\},$$

根据  $\sigma$  的连续性， $\tilde{V} := \sigma^{-1}((V, s))$  和  $\tilde{W} := \sigma^{-1}((W, t))$  都是  $U$  中的非空开集，分别包含  $x$  和  $y$ 。对于任意  $z \in \tilde{V} \cap \tilde{W}$ ，由  $\sigma$  的映射性  $(z, s_z) = \sigma(z) = (z, t_z)$ ，故存在  $z$  的一个邻域  $O \subseteq \tilde{V} \cap \tilde{W}$  使得  $s|_O = t|_O$ 。但是  $z$  是任取的，故  $s|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}} = t|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}}$ 。这样我们就得到了  $U$  的一个开覆盖，且在开集重合的部分截面是相容的。根据层公理，存在唯一的  $r \in \mathcal{F}(U)$  使得  $\sigma(x) = (x, r_x)$ 。

(iii) 记 $\mathcal{F}'$ 为 $\pi : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$ 的截面层. 定义

$$\begin{aligned}\theta : \bar{\mathcal{F}} &\rightarrow \mathcal{F}' \\ \theta_U : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)),\end{aligned}$$

于是我们需要验证对任意的开集 $U$ ,  $\theta_U$ 是群同构, 且对任意满足 $V \subseteq U$ 的开集 $U, V$ 都有图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathcal{F}'(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow |_V \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\theta_V} & \mathcal{F}'(V),\end{array}$$

交换, 其中 $|_V$ 是 $U$ 上函数在 $V$ 的限制.

对于 $\mathcal{F}'(U)$ 中的截面 $\sigma, \tau$ ,  $\sigma + \tau : x \mapsto (x, s_x + t_x)$ , 其中 $\sigma(x) = (x, s_x)$ ,  $\tau(x) = (x, t_x)$ . 于是, 同态性由正极限的性质保证, 再根据前一部分 $\theta_U$ 是同构, 其中, 层公理的局部性对应 $\theta$ 的单射性, 在局部性的存在下粘合条件等价于满射 (充分性由前一部分证明, 必要性考虑到截面本质上是映射, 是自动满足粘合条件的). 任取 $x \in V$ 和 $s \in \mathcal{F}(U)$ , 正极限保证 $s_x = (s|_V)_x$ , 这即是图的交换性.

(iv) 定义

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{F}} &\rightarrow \bar{\mathcal{G}} \\ (x, s_x) &\mapsto (x, \varphi_x(s_x)),\end{aligned}$$

于是我们只要证明函数是连续的即可. 对 $\bar{\mathcal{G}}$ 的任意 $X$ 中的开集 $U$ , 若 $t$ 是 $\mathcal{G}(U)$ 中的截面, 则对于 $(U, t)$ 中的任意点 $(x, t_x)$ , 若它在 $\bar{\varphi}$ 的像中, 则存在 $(x, s_x) \in \mathcal{F}_x$ 使得 $\varphi_x(s_x) = t_x$ . 这意味着, 存在 $x$ 的邻域 $W$ 使得 $\varphi_W(s)|_{W \cap U} = t|_{W \cap U}$ . 于是, 开集基中的元素 $(W \cap U, s|_{W \cap U})$ 包含于 $\bar{\varphi}$ 的原像中, 故

$$\varphi^{-1}((U, t)) = \coprod_{W \text{ 是 } U \text{ 中的开集, 且 } s \in \mathcal{F}(W) \text{ 满足 } \varphi_W(s) = t|_W} (W, s),$$

按照定义这是一个开集.  $\square$

习题 5.6. 设 $\varphi_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是拓扑空间 $X$ 上层的态射,  $i = 1, 2$ , 且对于任意 $x \in X$ , 都有 $(\varphi_1)_x = (\varphi_2)_x$ , 证明 $\varphi_1 = \varphi_2$ .

### 5.1.2 层化

对于一个预层 $\mathcal{F}$ 和 $X$ 中的开集 $U$ , 我们可以定义

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) := \{s : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid s \text{ 满足公理(i)和(ii)}\}$$

其中

- (i) 对每个 $U$ 中的点 $x$ ,  $s(x) \in \mathcal{F}_x$ ;
- (ii) 对每个 $U$ 中的点 $x$ , 都存在开邻域 $V \subseteq U$ 和截面 $t \in \mathcal{F}(V)$ 使得对于所有的 $y \in V$ 都有 $s(y) = t_y$ .

对于 $\mathcal{F}$ 中的任意截面 $s \in \mathcal{F}(U)$ , 我们都可以定义一个映射 $\tilde{s} : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x, y \mapsto s_y$ . 显然 $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ , 因此我们定义了一个预层的态射 $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ .

**命题 5.2.** 若预层 $\mathcal{F}$ 是层, 则 $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ 是层的同构.

如果尽可能具体地解释层化, 这个构造就是把原本没有的截面加到层的对象当中去, 进而形成我们需要的足够多的粘合信息, 而我们是局部来完成这个扩充的. 刚刚我们介绍的层化事实上就是用一个点的局部信息(茎)去构造相应的函数, 可以说层公理所描述的本质信息就是一定类型的函数. 我们对于层化的定义满足如下的泛性质和函子性:

**命题 5.3 (函子性).** 设 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层的态射, 那么存在层态射 $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ 使得下面的图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \zeta_{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \zeta_{\mathcal{G}} \\ \tilde{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{\mathcal{G}}. \end{array}$$

证明. 对任意 $X$ 中的开集 $U$ , 考虑点 $x \in U$ 和截面 $s \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ , 我们定义

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x) := \varphi_x(s(x)).$$

我们需要验证定义是层的态射, 并验证图的交换性.  $\square$

**推论 5.3.1 (泛性质).** 设 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层的态射, 若 $\mathcal{G}$ 是层, 则存在Abel群的同构

$$\text{hom}_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{hom}_{\mathbf{ShAb}(X)}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}).$$

事实上, 我们并不需要拓扑空间 $X$ 中所有开集 $U$ 所对应的对象 $\mathcal{F}(U)$ , 如果给定 $X$ 的一组基 $\mathcal{B}$ 中所有所有开集 $U$ 对应的对象 $\mathcal{F}(U)$ , 并且这些对象满足层公理, 那么我们存在唯一的 $X$ 上的层:

**定理 5.4 ( $\mathcal{B}$ -层).** 设 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 $X$ 的一组开集基, 对于每个 $U, V \in \mathcal{B}$ , 存在Abel群 $\mathcal{F}(U)$ 和限制同态 $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ 满足预层公理和层公理, 那么称 $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathcal{B}$ -层( $\mathcal{B}$ -sheaf). 于是

1. 任意 $\mathcal{B}$ -层都可以唯一地扩张为一个 $X$ 上的Abel群层.
2. 给定 $X$ 上的两个 $\mathcal{B}$ -层 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ , 且对每个 $\mathcal{B}$ 中的开集 $U$ 都有群态射

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

与 $\mathcal{B}$ -层的限制态射相容, 那么存在唯一的层态射 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{B}$ -层的扩张.

证明. 对任意 $X$ 中的开集 $V$ , 定义

$$\mathcal{F}(V) := \varprojlim_{U \in \mathcal{B} \text{ 满足 } U \subseteq V} \mathcal{F}(U),$$

其中逆向系中的态射由限制态射给定. 我们需要证明: (i) 该定义与原定义相容; (ii) 若 $V \subseteq W$ , 则存在 $\rho_V^W : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  与原有的限制函数相容, 且新构造的限制函数间也相容; (iii) 如此定义的预层构成一个层.

(i) 由极限的定义即可得到, 因为若 $V \in \mathcal{B}$ ,  $V$ 就是被 $V$ 包含的 $\mathcal{B}$ 中开集在嵌入映射下的终对象, 因此 $\mathcal{F}(V)$ 是始对象.(ii) 可以由极限的函子性推得. 这样我们只要验证这是一个层即可, 等价地, 我们证明对任意的开覆盖, 是一个等值子.  $\square$

**推论 5.4.1** (层的粘合原理). 设 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是拓扑空间 $X$ 的开覆盖. 若对任意 $\mathcal{U}$ 中的开集 $U$ ,  $\mathcal{F}_U$ 都是 $U$ 上的层, 并且

$$\varphi_{U,V} : \mathcal{F}_U|_{U \cap V} \rightarrow \mathcal{F}_V|_{U \cap V}$$

都是同构, 在 $U \cap V \cap W$ 上满足

$$\varphi_{V,W} \circ \varphi_{U,V} = \varphi_{U,W},$$

则存在唯一的 $X$ 上的层 $\mathcal{F}$ 使得有层的同构 $\psi : \mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ 且满足如下相容性: 对任意 $U, V \in \mathcal{U}$

$$\varphi_{U,V} \circ \psi_U|_{U \cap V} = \psi_V|_{U \cap V} : \mathcal{F}|_{U \cap V} \rightarrow \mathcal{F}_V|_{U \cap V}.$$

证明. 我们将验证如下论断: (i) 被 $\mathcal{U}$ 中的开集包含的所有开集构成 $X$ 的一组拓扑基 $\mathcal{B}$ ; (ii) 所给出的粘合条件自然地给出了一个 $\mathcal{B}$ -层, 于是根据定理5.4存在性和唯一性都得证.

(i) 这是一个单纯的拓扑问题, 我们略过证明.(ii) 对任意 $\mathcal{B}$ 中的开集 $W$ , 我们可以找到 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $W \subseteq U$ , 于是定义

$$\mathcal{F}(W) := \mathcal{F}_U(W),$$

且若 $W_1 \subseteq W_2 \subseteq U$ , 那么限制态射 $\rho_{W_1}^{W_2} : \mathcal{F}(W_2) \rightarrow \mathcal{F}(W_1)$ 定义为层 $\mathcal{F}_U$ 从 $W_1$ 到 $W_2$ 的限制. 这样定义首先出现的问题是, 我们对于 $U \in \mathcal{U}$ 的选取可能不是唯一的, 因而, 首先验证定义是合理的.

假设对于 $W$ , 存在不同的

由于原本的 $\mathcal{F}_U$ 是 $U$ 上的层, 根据例5.7, 我们这样的定义也是层, 于是根据之前的定理, 这个层存在且同构下唯一.  $\square$

事实上, 粘合后的层 $\mathcal{F}$ 是容易描述的: 对任意的开集 $W$ ,  $\mathcal{F}(W)$ 是所有 $\{s_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ 的全体, 其中 $s_U \in \mathcal{F}_U(W \cap U)$ 且满足 $\varphi_{U,V}(s_U)$ 在 $U \cap V \cap W$ 上等于 $\varphi_{V,U}(s_V)$ .

引入层化后我们其实有了对于层更进一步的认识——层完全由每点上的茎完全决定, 而决定的方式就是寻找连续的截面 (习题5.7). 在英语中, sheaf一词的含义是“a bundle of stalks”, 即一捆稻谷, 我们想象

习题 5.7. 设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的预层. 证明平展空间 $\mathcal{F}$ 的截面层 $\mathcal{F}'$ 同构于 $\mathcal{F}$ 的层化.

证明. 在习题5.5中我们定义了预层的态射

$$\begin{aligned}\theta : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}' \\ \theta_U : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)),\end{aligned}$$

于是只要证明 $\mathcal{F}'$ 的泛性质就能够说明同构. 设 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层到层的态射, 于是根据习题5.5我们有连续映射 $\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ , 进而对于任意的截面 $s : U \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$ ,  $\bar{\varphi} \circ s$ 也是 $U$ 上的截面, 这样我们定义了

$$\begin{aligned}\varphi' : \mathcal{F}' &\rightarrow \mathcal{G}' \cong \mathcal{G} \\ \varphi'_U : \mathcal{F}'(U) &\rightarrow \mathcal{G}'(U) \\ s &\mapsto \bar{\varphi} \circ s.\end{aligned}$$

$\varphi'_U$ 是群同态由由 $\varphi$ 的预层的态射性保证, 而它显然与两个层的限制态射相容, 于是我们得到了层的态射.

再证明唯一性. 假设 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层到层的态射, 层态射 $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ 满足

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{G} \\ \theta \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{F}. & & \end{array}$$

任取 $\sigma \in \mathcal{F}'(U)$ , 即截面 $\sigma : U \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$ , 对任意 $x \in U$ , 若 $\sigma(x) = (x, s_x)$ , 那么任取 $\sigma_x$ 的代表元 $\tau$ , 于是存在 $W \subseteq U$ 使得 $\sigma|_W = \tau|_W$ , 因此 $\tau(x) = (x, s_x)$ , 于是可以定义 $\eta_x : (\mathcal{F}')_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ ,  $\sigma_x \mapsto s_x$ . 根据截面加法的定义, 这显然是一个群态射. 一方面, 我们显然有 $\eta_x \circ \theta_x = \text{id}_{\mathcal{F}_x}$ . 另一方面, 仍然假定 $\sigma(x) = (x, s_x)$ , 那么由连续性 $V = \sigma^{-1}((U, s))$ 是 $U$ 中的非空开集, 这意味着对任意 $y \in V$ ,  $\sigma(y) = (y, s_y)$ , 于是 $\sigma|_V = \theta(s)|_V$ ,  $\theta_x(s_x) = \sigma_x$ . 因此,  $\theta_x \circ \eta_x = \text{id}_{(\mathcal{F}')_x}$ . 再根据习题5.6,  $\tilde{\varphi}$ 是唯一确定的.  $\square$

### 5.1.3 底空间变换

这一节我们考虑这样的问题,

**定义.** 设 $f : X \rightarrow Y$ 是拓扑空间的连续映射, 如果 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的预层, 则如下定义的

$$\begin{aligned}f_* \mathcal{F} : \mathbf{Open}(Y) &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto f_* \mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))\end{aligned}$$

是一个预层, 称为预层 $\mathcal{F}$ 的推出(pushforward).

对于 $Y$ 中的开集 $V \subseteq U$ , 我们定义限制同态 $f_* \mathcal{F}(U) \rightarrow f_* \mathcal{F}(V)$ 是 $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$ 到 $\mathcal{F}(f^{-1}(V))$ 的限制同态, 即若 $s \in f_* \mathcal{F}(U)$ , 则

$$s|_V = (s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)))|_{f^{-1}(V)}.$$

**引理 5.1.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是拓扑空间的连续映射, 如果  $\mathcal{F}$  是  $X$  上的层, 则推出  $f_* \mathcal{F}$  是  $Y$  上的层.

证明. 任取  $Y$  中的开集  $V$ , 设  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$  是  $V$  的开覆盖, 那么  $\mathcal{U} = \{U_i := f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$  是  $U := f^{-1}(V)$  的开覆盖. 于是, 若给定  $s_i \in f_* \mathcal{F}(V_i) = \mathcal{F}(U_i)$ , 满足  $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ , 于是  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ . 由  $\mathcal{F}$  是层得知存在唯一的  $s \in \mathcal{F}(U)$  使得  $s|_{U_i} = s_i$ . 按照层推出的定义, 这个  $s$  就是  $f_* \mathcal{F}(V)$  中要找的唯一的元素, 故  $f_* \mathcal{F}$  是层.  $\square$

如果我们还有一个  $X$  上的预层态射  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , 则对于任意的  $Y$  中的开集  $U$ , 同态映射  $\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{G}(\varphi^{-1}(U))$  和限制映射  $\rho_{\varphi^{-1}(V)}^{\varphi^{-1}(U)}$  相容, 于是  $\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{G}(\varphi^{-1}(U))$  自然地可以看作  $\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : f_* \mathcal{F}(U) \rightarrow f_* \mathcal{G}(U)$ , 这样我们说明了  $f_* \varphi$  是预层态势  $f_* \mathcal{F} \rightarrow f_* \mathcal{G}$ . 如果还有  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , 那么很明显地有  $f_*(\psi \circ \varphi) = f_* \psi \circ f_* \varphi$ . 于是  $f_*$  是一个函子  $\mathbf{PShAb}(X) \rightarrow \mathbf{PShAb}(Y)$ .

习题 5.8. 设  $f : X \rightarrow Y$  和  $g : Y \rightarrow Z$  是两个连续映射, 那么

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

**定义.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是拓扑空间的连续映射, 如果  $\mathcal{G}$  是  $Y$  上的预层, 则如下定义的

$$\begin{aligned} f_P \mathcal{G} : \mathbf{Open}(X) &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ V &\mapsto f_P \mathcal{G}(U) := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ V \in \mathbf{Open}(Y) \\ f(U) \subseteq V}} \mathcal{G}(V) \end{aligned}$$

是一个预层, 称为预层  $\mathcal{G}$  的拉回(pullback).

**引理 5.2.** 设  $X$  和  $Y$  是拓扑空间,  $f : X \rightarrow Y$  是连续映射, 那么下面的同构关于  $\mathcal{G}$  和  $\mathcal{F}$  是自然的:

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \hom_{\mathbf{PShAb}(Y)}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F}).$$

证明. 我们首先证明同构. 设  $\varphi \in \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P \mathcal{G}, \mathcal{F})$ , 于是任意给定  $X$  中的开集, 按照极限的定义,  $\varphi_U : f_P \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  完全由一族相容的态射

$$\varphi_V :$$

其中  $V$  取遍所有包含  $f(U)$  的开集.  $\square$

与推出不同的是, 即使  $\mathcal{G}$  是  $Y$  上的层,  $f_P \mathcal{G}$  也可能并不是一个层, 但作为预层, 层的拉回也有很好的函子性质. 我们称  $f_P^{-1} \mathcal{G}$  的层化为  $\mathcal{G}$  的逆象层(inverse sheaf), 记为  $f^{-1} \mathcal{G}$ .

**定义.** 设  $X$  是拓扑空间,  $\mathcal{F}$  是  $X$  上的层

### 5.1.4 层范畴及其中的正合性

设  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是空间  $X$  上预层的态射,

**引理 5.3.** 层态射的单态射是范畴意义下的单态射, 且层态射的满态射是范畴意义下的满态射.

证明. □

给定拓扑空间  $X$  和上面的层  $\mathcal{F}$ , 若对于任意的  $V \subseteq U$ , 限制映射  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  都是满射, 则称  $\mathcal{F}$  是 flasque.

习题 5.9. 求证层态射单射(满射)的局部性: 给定拓扑空间  $X$  和开覆盖  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  使得层态射  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  的限制

$$\varphi_{U_i} : \mathcal{F}_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}_{U_i}$$

对所有的  $i \in I$  都是单射(满射), 那么  $\varphi$  本身也是单射(满射).

证明. □

习题 5.10 (层的零扩张). 设  $X$  是拓扑空间,  $Z$  是  $X$  的闭集,  $i : Z \rightarrow X$  是嵌入映射. 令  $U := X - Z$  是  $Z$  在  $X$  中的补集,  $j : U \rightarrow X$  是嵌入映射.

1. 设  $\mathcal{F}$  是  $Z$  上的层, 证明

$$(i_* \mathcal{F})_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & x \in Z \\ 0 & x \notin Z. \end{cases}$$

于是我们称  $i_* \mathcal{F}$  是  $\mathcal{F}$  在  $X$  上的零扩张. 证明若  $X$  上的层  $\mathcal{F}$  对所有  $x \notin Z$  满足  $\mathcal{F}_x = 0$ , 那么层的同态

$$\rho_Z^X : (i_* \mathcal{F})|_Z \rightarrow \mathcal{F}$$

是同构, 并且由此推导出对任意  $Z$  上的层  $\mathcal{G}$ , 存在唯一的  $X$  上的层  $\mathcal{F}$  满足对所有  $x \in Z$  满足  $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x$ , 对所有  $x \notin Z$  满足  $\mathcal{F}_x = 0$ .

2. 设  $\mathcal{G}$  是  $U$  上的层, 定义  $X$  上的层  $\mathcal{F}$  满足对任意  $X$  中的开集  $V$ ,

$$j_! \mathcal{G}(V) := \begin{cases} \mathcal{G}(V) & V \subseteq U \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

证明

$$(j_! \mathcal{G})_x = \begin{cases} \mathcal{G}_x & x \in U \\ 0 & \text{其他情况,} \end{cases}$$

并且证明  $j_! \mathcal{G}$  是满足以上条件且限制在  $U$  上是  $\mathcal{G}$  的唯一一个层.

3. 现在假设  $\mathcal{F}$  是  $X$  上的层, 证明我们有如下层的正合列:

$$0 \rightarrow j_!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow 0.$$

证明. 1. 直接由定义, 若  $x \in U$ , 那么存在  $x$  在  $X$  中的邻域  $V$  使得  $V \cap Z = \emptyset$ , 此时  $i_* \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(i^{-1}(V)) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$ , 因此对任意包含  $x$  的开集  $W$ ,  $i_* \mathcal{F}(W \cap V) = 0$ , 即  $(i_* \mathcal{F})_x = 0$ . 另一方面, 若  $x \in Z$ , 那么

$$(i_* \mathcal{F})_x = \operatorname{colim}_{W \text{ 是包含 } x \text{ 的开集}} (i_* \mathcal{F})(W) = \operatorname{colim}_{W \text{ 是包含 } x \text{ 的开集}} \mathcal{F}(W \cap Z) = \mathcal{F}_x.$$

□

**定义.** 给定拓扑空间  $X$  和 Abel 群层  $\mathcal{F}$ , 若对任意开集  $U$ ,  $\mathcal{F}(U)$  是环, 并且所有的限制映射都是环同态, 则称  $\mathcal{F}$  是  $X$  上的环层 (sheaf of rings).

## 5.2 Čech 上同调

之前的理论中我们建立了层的上同调理论, 但我们面临一个相当严重的问题——对于一个给定的层, 它的上同调几乎是不可计算的. 虽然任意层的内射都是存在的, 但构造过于庞大 Čech 上同调的主要思想是我们考虑拓扑空间中开覆盖所包含的组合信息,

设  $X$  是拓扑空间,  $\mathcal{F}$  是  $X$  上的层. 给定全序集  $\Lambda$  和的  $X$  开覆盖  $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , 那么存在拓扑空间的图

$$X \xleftarrow{\partial_0} \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \xleftarrow[\partial_1^0]{\partial_1^1} \coprod_{\lambda_0 < \lambda_1} U_{\lambda_0 \lambda_1} \xleftarrow[\partial_2^0]{\partial_2^1} \coprod_{\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2} U_{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2} \xleftarrow{} \cdots,$$

其中

$$U_{\lambda_0 \dots \lambda_n} := \bigcap_{i=0}^n U_{\lambda_i},$$

映射  $\partial_i$  是自然的嵌入

$$U_{\lambda_0 \dots \lambda_n} \hookrightarrow U_{\lambda_0 \dots \hat{\lambda}_i \dots \lambda_n}$$

扩展到不交并的映射.

将层  $\mathcal{F}$  视为反变函子, 去掉  $-1$  项  $M$ , 我们可以得到一个上链, 具体操作如下: 对任意  $q \geq 0$ , 我们定义  $\mathcal{F}$  (对于  $\mathcal{U}$ ) 的  $q$  上链群 (group of  $q$ -cochain of  $\mathcal{F}$  (relative to  $\mathcal{U}$ )) 为

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\lambda_0 < \dots < \lambda_q} \mathcal{F}(U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_q}),$$

它恰好是  $\mathcal{F}\left(\coprod_{\lambda_0 < \dots < \lambda_q} U_{\lambda_0 \dots \lambda_q}\right)$ ; 进而可以定义上边缘映射

$$d_i^{q-1} := \mathcal{F}(\partial_q^i) : \prod_{\lambda_0 < \dots < \hat{\lambda}_i < \dots < \lambda_q} \mathcal{F}(U_{\lambda_0 \dots \hat{\lambda}_i \dots \lambda_q}) \rightarrow \prod_{\lambda_0 < \dots < \lambda_q} \mathcal{F}(U_{\lambda_0 \dots \lambda_q}),$$

具体而言, 给定  $f \in \prod_{\lambda_0 < \dots < \hat{\lambda}_i < \dots < \lambda_q} \mathcal{F}(U_{\lambda_0 \dots \hat{\lambda}_i \dots \lambda_q})$ , 确定  $d_i^q(f)$  只需要确定每一个序号为  $(\lambda_0, \dots, \lambda_q)$  的项, 而  $\partial_q^i$  只将  $U_{\lambda_0 \dots \hat{\lambda}_i \dots \lambda_q}$  映入  $U_{\lambda_0 \dots \lambda_q}$ , 于是  $(\lambda_0, \dots, \lambda_q)$  项为  $d_i^{q-1}(f)_{\lambda_0, \dots, \lambda_q} = f_{\lambda_0, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_q} := (f_{\lambda_0, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_q})|_{U_{\lambda_0 \dots \lambda_q}}$ . 进

而  $d_i^{q-1}$  的交错和

$$\begin{aligned}\delta^{q-1} := \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i d_i^{q-1} : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ f &\mapsto \left\{ \sum_{i=0}^q (-1)^i f_{\lambda_0, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_q} \right\}_{\lambda_0, \dots, \lambda_q}.\end{aligned}$$

这给出了一个上链

$$0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^2} \cdots,$$

被称为  $X$  关于开覆盖  $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  的  $\mathcal{F}$  系数 Čech 上链 (Čech cochain of  $X$  with respect to  $\mathcal{U}$  of coefficient  $\mathcal{F}$ ). 我们这里并不直接验证良定义, 而是借用习题 1.1 (的对偶), 于是我们只需要验证上单纯条件:

事实上, 这里的上单纯条件来源于开覆盖  $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  给出的单纯集

**引理 5.4.** 对任意拓扑空间  $X$  和  $X$  上的层  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  是  $X$  的一族开覆盖, 都有

$$\check{H}^0(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

证明. 按定义,

$$\check{H}^0(\mathcal{F}, \mathcal{U}) = \{f \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}$$

□

引理说明 Čech 上链存在一个自然的推广  $\Gamma(X, \mathcal{F})$ .

**定义.** 给定拓扑空间  $X$  和开覆盖  $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  和  $\mathcal{V} = \{V_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ , 若存在映射  $\varphi : \Theta \rightarrow \Lambda$  使得

$$V_\theta \subseteq U_{\varphi(\theta)}$$

对任意  $\theta \in \Theta$  成立, 则称  $\mathcal{V}$  是  $\mathcal{U}$  的加细 (refinement).

**引理 5.5.** 当给定  $\mathcal{U}$  的加细  $\mathcal{V}$  后, 加细映射  $\varphi : \Theta \rightarrow \Lambda$  给出了 Čech 上链的映射

$$\varphi^* : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

满足

$$\varphi^*(f)_{\theta_0, \dots, \theta_q} := f_{\lambda_0, \dots, \lambda_q}$$

对任意  $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  成立, 其中  $\lambda_i = \varphi(\theta_i)$ .

证明. 直接验证

$$\begin{aligned}
 \varphi^*(\delta f)_{\theta_0, \dots, \theta_q} &:= (\delta f)_{\varphi(\theta_0), \dots, \varphi(\theta_q)} \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k f_{\varphi(\theta_0), \dots, \widehat{\varphi(\theta_k)}, \dots, \varphi(\theta_q)} \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \varphi^*(f)_{\theta_0, \dots, \widehat{\theta_k}, \dots, \theta_q} \\
 &= \delta(\varphi^*(f)).
 \end{aligned}$$

□

**命题 5.5.** 若  $\mathcal{V}$  是拓扑空间  $X$  开覆盖  $\mathcal{U}$  的加细, 且  $\varphi, \psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  是不同的加细映射, 则  $\varphi, \psi$  诱导 Cech 上同调上相同的映射.

证明. 定义上链同伦

$$H : C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

满足

$$(Hf)_{\theta_0, \dots, \theta_q} := \sum_{k=0}^n (-1)^k f_{\varphi(\theta_0), \dots, \varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \dots, \psi(\theta_q)},$$

于是

$$\begin{aligned}
 H\delta(f) - \delta H(f) &= \\
 &=
 \end{aligned}$$

即

$$\varphi^* - \psi^* = H\delta - \delta H,$$

这就完成了证明.

□

# 第六章 群的同调代数

## 6.1 群的同调和上同调

设 $G$ 是一个群.

**定义.** 给定Abel群 $A$ , 若 $G$ 在 $A$ 上右一个(左)作用, 则称 $A$ 是一个 $G$ 模( $G$ -module).

注意到给定 $G$ 模 $A$ 等价于给定Abel群 $A$ 和群同态 $G \rightarrow \text{Aut}(A)$ . 由于Abel群等同于 $\mathbb{Z}$ 模, 因而 $G$ 模等同于 $\mathbb{Z}[G]$ 模.

**定义.** 给定 $G$ 模 $A$ , 记

$$A^G := \{a \in A \mid g \cdot a = a \text{ 对所有 } g \in G \text{ 成立}\}$$

是 $A$ 中被 $G$ 作用不变的元素的全体.

**引理 6.1.** 给定 $G$ 模 $A$ 和具有平凡作用的 $G$ 模 $\mathbb{Z}$ , 则

$$A^G \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

证明. 任意给定 $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ , 由于 $G$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的作用是平凡的,  $\alpha(1) = \alpha(g \cdot 1) = g\alpha(1)$ , 于是映射

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) &\rightarrow A^G \\ \alpha &\mapsto \alpha(1) \end{aligned}$$

是良定义的, 这显然是一个Abel群同态. 注意到 $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ 完全由 $\alpha(1)$ 决定, 因此这是一个单射; 同时该映射是满射, 得证.  $\square$

引理6.1说明给定 $G$ 模的短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

存在诱导的Abel群(也是平凡 $G$ 模)正合列

$$0 \rightarrow A^G \rightarrow B^G \rightarrow C^G,$$

即 $-^G$ 是一个左正合的函子.因此,只要能够找到一个平凡 $G$ 模 $\mathbb{Z}$ 的投射消解,那么套用之前的理论可以得到 $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, A)$ ,我们称其为群 $G$ 以 $A$ 为系数的上同调群

例 6.1. 考虑 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$ 是有限循环群, 取

$$N := 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{n-1} \in \mathbb{Z}[G],$$

那么

$$(1 - \sigma)N = N(1 - \sigma) = 0 \in \mathbb{Z}[G],$$

于是可以验证

$$\xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\sigma \mapsto 1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

是 $\mathbb{Z}$ 的消解,于是对于任意 $G$ 模 $A$ ,由 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) = A$ 我们得到了复形

$$0 \rightarrow A$$

**定义.** 给定群 $G$ , 取

$$F_n := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$$

(共有 $n+1$ 个张量积项),  $G$ 在 $F_n$ 上的作用由

$$g \cdot (g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) := (g \cdot g_0) \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n$$

诱导,且有

$$d_i^{[n]} : F_n \rightarrow F_{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n$$

满足

$$d_i^{[n]}(1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) := \begin{cases} g_1 \cdot (1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n) & i = 0, \\ (1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_{i-1} \otimes g_i g_{i+1} \otimes \cdots \otimes g_n) & 0 < i < n, \\ 1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_{n-1} & i = n. \end{cases}$$

**引理 6.2.** 如上定义中,

1.  $F_n$ 是自由 $\mathbb{Z}[G]$ 模,且它的一组基可选为 $\{1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n\}_{g_i \in G}$ ,

2.  $\{d_i^{[n]}\}_{0 \leq i \leq n}$ 扩张为一组 $\mathbb{Z}[G]$ 模同态,满足

$$d_i^{[n]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n]} d_i^{[n]},$$

因此根据习题 1.1,

$$\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^{[n]}$$

给出了链复形

$$0 \leftarrow F_0 \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} F_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} \cdots.$$

3.  $\epsilon : F_0 = \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{i=1}^N n_i g_i \mapsto \sum_{i=1}^N n_i$  给出了增广链复形

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\epsilon} F_0 \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} F_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} \cdots.$$

4.

引理6.2说明构造的 $\{F_n\}$ 给出了平凡 $\mathbb{Z}[G]$ 模 $\mathbb{Z}$ 的一个消解，我们称之为标准消解(standard resolution)或bar消解(bar resolution).

习题 6.1. 除了bar消解外，



# 第七章 其他类型的同调

## 7.1 超上同调

我们考虑这样的问题：设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的层

$$\mathcal{F} : \mathbf{Open}(X)^\circ \rightarrow \mathcal{B},$$

其中 $\mathcal{B}$ 是Abel范畴，此时 $\mathcal{F}$ 是以 $\mathcal{B}$ 中对象为对象的层.那么可以求 $X$ 关于层 $\mathcal{F}$ 的上同调

$$H^i(\mathcal{F}, X),$$

它是 $\mathcal{B}$ 中的对象.特别地，当 $\mathcal{B}$ 是某个给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 的上链复形范畴时，每个上同调都是一个 $\mathcal{A}$ 的上链复形，此时还可以求上链复形 $H^i(\mathcal{F}, X)$ 的上同调

**命题 7.1.** 设 $\mathcal{F}^\bullet$ 是拓扑空间 $X$ 上的层上链复形， $f^\bullet : \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$ 是injective的拟同构.则对于任意的内射复形 $\mathcal{I}^\bullet$ 和复形的态射 $g^\bullet : \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ ，存在态射 $\tilde{g}^\bullet : \mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ 使得

$$g^\bullet = \tilde{g}^\bullet \circ f^\bullet.$$

**命题 7.2.** 设 $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ 是链映射， $C^\bullet \rightarrow I^{\bullet, \bullet}$ 和 $D^\bullet \rightarrow J^{\bullet, \bullet}$ 是两个Cardan-Eilenburg消解，那么存在链映射 $\tilde{f}^{\bullet, \bullet} : I^{\bullet, \bullet} \rightarrow J^{\bullet, \bullet}$ 是 $f^\bullet$ 上的映射.

给定一个 $n$ 维复流形 $X$ ，那么可以定义其上的C向量空间层的复形

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \xrightarrow{\partial} \Omega_X^2 \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \Omega_X^n \rightarrow 0,$$

其中 $\Omega_X^q$ 是 $X$ 上的全纯 $q$ 形式，那么如上复形是常层 $\mathbb{C}$ 的消解.

## 7.2 Lie

**定义.** 给定  $k$  上的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$ ,  $M$  是  $\mathfrak{g}$  模, 定义如下的

$$C_n^{\text{CE}}(\mathfrak{g}, M) := M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g},$$

其中  $\bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \wedge_k \cdots \wedge_k \mathfrak{g}$ , 并且有边缘映射

$$\begin{aligned} \partial_n : M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g} &\rightarrow M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g} \\ m \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^i [m, a_i] \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_n \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} m \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge \hat{a}_j \wedge a_n, \end{aligned}$$

称复形  $(C_{\bullet}^{\text{CE}}(\mathfrak{g}, M), \partial_{\bullet})$  为 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  以  $M$  为系数的 Chevalley-Eilenberg 复形 (Chevalley-Eilenberg). 对偶地, 定义如下的

$$C_{\text{CE}}^n(\mathfrak{g}, M) := \text{Hom}_k \left( \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g}, M \right)$$

和微分映射

$$d^n : \text{Hom}_k \left( \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g}, M \right) \rightarrow \text{Hom}_k \left( \bigwedge_{i=1}^{n+1} \mathfrak{g}, M \right)$$

满足

$$\begin{aligned} d\omega(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \omega(x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots x_n), \end{aligned}$$

则称  $(C_{\text{CE}}^{\bullet}, d^{\bullet})$  是

### 7.3 Hochschild

本节中我们都假定  $k$  是交换环, 理想的情况下它会是域.

**定义.** 给定交换基代数  $k$  和  $k$  代数  $A$ , 若 (对称)  $k$  模  $M$  同时具有左右  $A$  模结构, 且满足对任意  $a, b \in A, m \in M$  都有

$$(am)b = a(mb),$$

且  $k$  在  $M$  上的左右作用与  $A$  在  $M$  上的左右作用相容, 则称  $M$  是一个  $A$  双模 ( $A$ -bimodule). 若  $A$  还有单位元, 则一般要求

$$1m = m = m1.$$

记  $A^e = A \otimes_k A$ , 那么一个  $A$  双模  $M$  同时是一个左  $A^e$  模, 作用由

$$(a \otimes b)m = amb$$

给出. 或者, 一个  $A$  双模  $M$  同时是一个右  $A^e$  模, 作用由

$$m(a \otimes b) = b^{-1}ma$$

给出.

**定义.** 给定交换基代数  $k$  和  $k$  代数  $A$ ,  $M$  是  $A$  双模, 给定  $A$  模

$$C_n(A, M) := M \otimes_k A^{\otimes n},$$

其中  $A^{\otimes n} := A \otimes_k \cdots \otimes_k A$ , 并且有如下 Hochschild 边缘映射

$$\partial_n : C_n(A, M) \rightarrow C_{n-1}(A, M)$$

$$\begin{aligned} m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

那么  $(C_\bullet^{\text{Hoch}}(A, M), \partial_\bullet)$  称为 Hochschild 复形 (Hochschild complex), 对应的同调群称为  $A$  以  $M$  为系数的 Hochschild 同调群 (Hochschild homology group of  $A$  with coefficients in  $M$ ), 记为  $HH_\bullet(A, M)$ . 特别地若  $M = A$ , 我们记  $HH_\bullet(A)$ .

**引理 7.1.**  $(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$  是链复形.

证明. 定义

$$\begin{aligned} d_i^{[n]} : C_n(A, M) &\rightarrow C_{n-1}(A, M) \\ d_0(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

于是

$$d_i^{[n]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n]} d_i^{[n]}$$

对  $0 \leq i < j \leq n$  成立, 这样  $C_\bullet(A, M)$  是预单纯的, 因此根据习题 1.1,  $(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$  是链复形.  $\square$

事实上, 如上定义的同调群  $HH_\bullet(A, M)$  关于  $M$  有函子性: 给定一个  $A$  双模同态  $\psi : M \rightarrow N$ , 那么它诱导

的

$$\begin{aligned}\psi_\bullet : C_\bullet(A, M) &\rightarrow C_\bullet(A, N) \\ \psi_n : m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto \psi(m) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\end{aligned}$$

是一个链映射，因此诱导了Hochschild同调群的同态；同时群 $HH_\bullet(A, M)$ 关于 $A$ 也有函子性：给定一个 $k$ 代数同态 $\varphi : A \rightarrow B$ ，它诱导的

$$\begin{aligned}\varphi_\bullet : C_\bullet(A, M) &\rightarrow C_\bullet(B, M) \\ \varphi_n : m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto m \otimes \varphi(a_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(a_n)\end{aligned}$$

是一个链映射，因此诱导了Hochschild同调群的同态.

**例 7.1.** 首先考虑 $HH_0(A, M)$ . 按定义， $HH_0(A, M) = C_0(A, M)/\text{Im } \partial_1$ ，注意到 $\partial_1 : a \otimes m \mapsto ma - am$ 的定义使得 $\text{Im } \partial_1$ 中的元素都是形如 $ma - am$ 这样的元素生成的，因此

$$HH_0(A, M) = M/\langle ma - am \rangle =: M/[M, A].$$

特别地， $HH_0(A) = A/[A, A]$ .

**例 7.2.** 当 $A = k$ 时， $C_n(A) = k$ 对于任意 $n$ 都成立，并且 $d_i^{[n]} = \text{id}$ 对任意 $1 \leq i \leq n$ . 于是，Hochschild复形是

$$\cdots \rightarrow k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k,$$

因此 $HH_*(k) = k[0]$ .

**习题 7.1.** 给定 $k$ 代数 $A$ ，记 $Z(A) := \{z \in A \mid az = za \ \forall a \in A\}$ 为 $A$ 的中心，求证 $Z(A)$ 在 $C_\bullet(A, M)$ 上的作用

$$z \cdot (m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := zm \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

和

$$(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot z := mz \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

是同伦的. 事实上，这还是个单纯同伦.

**命题 7.3.** 若 $A$ 是含幺的交换 $k$ 代数，那么存在自然的同构

$$HH_1(A) \cong \Omega_{A/k}^1.$$

若 $M$ 还是对称的 $A$ 双模（即 $am = ma$ 对任意 $a \in A, m \in M$ ）都成立，那么存在自然同构

$$HH_1(A, M) \cong M \otimes_A \Omega_{A/k}^1.$$

证明. 由于 $A$ 是交换代数，因此 $\partial_1 : A \otimes_k A \rightarrow A$ （例7.1）是0映射，因此

$$HH_1(A) \cong A \otimes_k A / \langle ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b \rangle.$$

这样对于映射

$$\begin{aligned} HH_1(A) &\rightarrow \Omega_{A/k}^1 \\ a \otimes b &\mapsto adb \end{aligned}$$

是良定义的，且是 $A$ 模同态.容易验证这是一个同构.  $\square$

接下来我们希望用导出函子的语言来描述Hochschild同调.

**定义.** 给定 $k$ 代数 $A$ , 记 $A^\circ$ 为 $A$ 的对偶代数 (即与 $A$ 具有相同的元素, 但乘法定义为 $a^\circ \cdot b^\circ := (ba)^\circ$ ), 令 $A^e := A \otimes_k A^\circ$ , 那么对于任意的 $A$ 双模 $M$ 都有 $A^e$ 的左作用

$$(a \otimes b)m := amb.$$

那么如下链复形称为bar复形(Bar complex):

$$C_\bullet^{\text{bar}}(A) : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\text{bar}}} A^{\otimes n+1} \xrightarrow{\partial_n^{\text{bar}}} A^{\otimes n} \xrightarrow{\partial_{n-1}^{\text{bar}}} \cdots \xrightarrow{\partial_1^{\text{bar}}} A^{\otimes 2} \rightarrow 0,$$

其中 $A^{\otimes 2}$ 处于0阶位置, 且 $\partial_n^{\text{bar}} := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$  (注意到求和不取到 $n+1$ ).由乘法定义的映射

$$\mu : A \otimes_k A \rightarrow A$$

是复形 $C_\bullet^{\text{bar}}$ 的扩张.

很明显

$$HH_*(A) \cong H_*(M \otimes_{A^e} C_\bullet^{\text{bar}}(A)),$$

即Hochschild同调是 $A^e$ 模链复形 $C_\bullet^{\text{bar}}(A)$ 以 $M$ 为系数的同调.

**命题 7.4.** 设 $k$ 代数 $A$ 是含幺的, 那么复形 $C_\bullet^{\text{bar}}(A)$  (附有扩张 $\mu : C_\bullet^{\text{bar}}(A) \rightarrow A$ ) 是 $A^e$ 模 $A$ 的自由 $A^e$ 模消解, 它称为bar消解(Bar resolution).

证明. 对于这里的证明我们通过构造新的称为退化映射(degeneracy map)的结构, 来获得新的信息完成证明. 定义

$$\begin{aligned} s : A^{\otimes n} &\rightarrow A^{\otimes n+1} \\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, \end{aligned}$$

那么可以验证 $d_i s = s d_{i-1}$ 对任意 $i = 1, \dots, n-1$ 成立, 且 $d_0 s = \text{id}$ , 于是

$$\bar{\partial}s + s\bar{\partial} = \text{id},$$

因此这证明了 $\bar{C}_\bullet$ 是消解.  $\square$

在如上的证明中我们事实用到了 $A$ 有左单位的事实，当 $A$ 有右单位时，取

$$\begin{aligned} s : A^{\otimes n} &\rightarrow A^{\otimes n+1} \\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \end{aligned}$$

即可.此外，复形 $\bar{C}_\bullet$ 的边缘算子 $\bar{\partial}$ 完全由如下性质决定：

1.  $\bar{\partial}$ 是左 $A$ 模同态，
2.  $\bar{\partial}_0 = \mu$ ，
3.  $\bar{\partial}s + s\bar{\partial} = \text{id}$ ，

并且这给出了链同构 $C_\bullet(A, A^e) \cong C_\bullet^{\text{bar}}(A)$ .

事实上，我们可以扩充如上的构造使得 $C_\bullet(A, M)$ 成为一个单纯对象，因而可以通过商去退化对象得到正规化的Hochschild复形，鉴于这些讨论需要其他工具的建立，在此略去.

**定理 7.5.** 给定 $k$ 代数 $A$ ，若 $A$ 是投射 $k$ 模，那么对任意 $A$ 双模 $M$ ，存在自然的同构

$$HH_n(A, M) \cong \text{Tor}_n^{A^e}(M, A).$$

证明. 根据假设， $A^{\otimes n}$ 对于任意自然数 $n$ 也是投射 $k$ 模，因此 $A^{\otimes n+2} = A \otimes_k A^{\otimes n} \otimes_k A$ 是投射 $A^e$ 模（其中模结构由 $(a \otimes b)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) := aa_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}b$ 给出）.这是因为，???

于是，注意到 $M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+2} \cong M \otimes_k A^{\otimes n}$ ，定理成立.  $\square$

引理2.1说明？答案当然是否定的！这是因为命题7.4中的同伦是 $k$ 模范畴中的同伦，而函子是 $A^e$ 上的张量积.

例 7.3.

类似于拓扑中的同调理论，对于任意 $A$ 的双边理想 $I$ ，短正合列 $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ 诱导了同调群的长正合列

$$\cdots \rightarrow HH_n(A, I) \rightarrow HH_n(A) \rightarrow HH_n(A/I) \rightarrow HH_{n-1}(A, I) \rightarrow \cdots,$$

因此可以称 $HH_n(A, I)$ 是相对Hochschild同调群.更一般地，对于任意的 $k$ 代数同态 $A \rightarrow B$ ，它诱导的链映射 $C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(B)$ 的映射锥给出了诱导的长正合列.

习题 7.2. 给定两个含幺 $k$ 代数，那么存在自然同构

$$HH_*(A \oplus B) \cong HH_*(A) \oplus HH_*(B).$$

习题 7.3. 记 $Z(A)$ 是 $A$ 的中心， $U \subseteq Z(A)$ 是乘性子集且 $1 \in U$ ，对任意左 $A$ 模 $M$ 定义 $M[U^{-1}] := Z(A)[U^{-1}] \otimes_A M$ ，那么当 $A$ 是 $k$ 平坦时，存在自然的同构

$$HH_n(A, M)[U^{-1}] \cong HH_n(A, M[U^{-1}]) \cong HH_n(A[U^{-1}], M[U^{-1}]).$$

习题 7.4. 给定一族  $k$  代数同态  $\{f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ , 求证

$$\operatorname{colim}_i HH_n(A_i) \cong HH_n(\operatorname{colim}_i A_i).$$

习题 7.5 (MacLane). 给定 (离散) 群  $G$  并记  $k[G]$  为  $G$  的群代数, 并且给定  $k[G]$  双模  $M$ . 设  $G$  在  $M$  上的 (右) 作用是

$$m^g := g^{-1}mg,$$

求证存在自然同构

$$HH_*(k[G], M) \cong H_*(G, M),$$

其中  $H_*(G, M)$  是  $M$  系数的群同调.

证明.

$$\begin{aligned} \varphi : C_\bullet^{\text{Hoch}}(k[G], M) &\rightarrow C_\bullet^{\text{EM}}(G, M) \\ \varphi_n : C_n^{\text{Hoch}}(k[G], M) &\rightarrow C_n^{\text{EM}}(G, M) \\ m \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n &\mapsto m^{g_1 \cdots g_n} \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n. \end{aligned}$$

□

习题 7.6. 给定平坦  $A$  双模的短正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ , 求证存在长正合列

$$\cdots \rightarrow HH_n(A, M) \rightarrow HH_n(A, N) \rightarrow HH_n(A, P) \rightarrow HH_{n-1}(A, M) \rightarrow \cdots.$$

事实上, 只要  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$  是  $k$  分裂的即可.

习题 7.7. 给定  $k$  代数  $A$  的双边理想  $I, J$ , 尝试定义双相对 Hochschild 同调  $HH_*(A; I, J)$  使得存在如下长整合列

$$\cdots \rightarrow HH_n(A, I) \rightarrow HH_n(A; I, J) \rightarrow HH_n(A, J) \rightarrow HH_{n-1}(A, I) \rightarrow \cdots,$$

并且证明当  $I \cap J = 0$  时,  $HH_0(A; I, J) = 0$  且  $HH_1(A; I, J) = I \otimes_{A^e} J$ .

### 7.3.1 Cohomology

给定  $R$  代数  $A$  和  $A$  双模  $M$ ,

$$HH^*(A) := H^*(\operatorname{Hom}_{A^e}(C_\bullet^{\text{bar}}(A), M)),$$

具体地, 按定义任意给定  $\bar{f} \in \operatorname{Hom}_{A^e}(C_n^{\text{bar}}(A), M)$ ,

$$\begin{aligned} d\bar{f}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+2}) &:= \bar{f}(\partial_{n+1}^{\text{bar}}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+2})) \\ &= \bar{f} \left( a_0 a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+2} \right) \\ &= a_0 \bar{f}(a_1 \otimes \cdots \otimes 1) a_{n+2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_0 \bar{f}(1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes 1) a_{n+2} \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_0 \bar{f}(1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) a_{n+2}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A^e}(C_n^{\text{bar}}(A), M) &\leftrightarrows \text{Hom}_R(A^{\otimes n}, M) \\ \bar{f} &\mapsto f : (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mapsto [\bar{f}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)] \\ [\bar{f}] &: (a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \mapsto a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1} \leftrightarrow f \end{aligned}$$

给出了  $R$  模的同构，因此 Hochschild 上同调  $HH^*(A; M)$  也可由复形  $(C^\bullet(A; M), d^\bullet)$  来定义，其中

$$C^n(A; M) := \text{Hom}_R(A^{\otimes n}, M),$$

微分映射  $d^n : C^n(A; M) \rightarrow C^{n+1}(A; M)$  定义为

$$\begin{aligned} df(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &+ (-1)^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) a_n. \end{aligned}$$

例 7.4.

$$HH^0(A, M) = M^A := \{m \in M \mid ma = am \ \forall a \in A\}$$

$$HH^1(A, M) = \text{Der}(A, M)/\{\text{内微分}\}$$

定理 7.6. 给定带单位元的  $k$  代数  $A$  和  $A$  双模  $M$ ，那么存在自然的双射

$$HH^2(A, M) \cong \mathcal{E}xt(A, M),$$

其中  $\mathcal{E}xt(A, M)$  是  $A$  关于  $M$  的平方零扩张的等价类的全体。

例 7.5. 考虑  $A := k[x_1, \dots, x_n]$  和任意  $A$  双模  $M$ （因此  $M$  可以看作  $A^e$  模），我们希望计算

$$HH_i(A, M) = \text{Tor}_i^{A^e}(A, M).$$

### 7.3.2 Hochschild-Kostant-Rosenberg

定理 7.7.

## 7.4 循环上同调\*

给定  $R$  代数  $A$ ，上一节中我们定义了  $A$  的 Hochschild 复形  $C_\bullet(A|R)$ ，这一节我们考虑  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  在复形上的作用，它诱导了一个新的同调，称为循环同调。设  $t_n$  是  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  的一个生成元，定义  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  在  $A^{\otimes n+1}$  上的作用为

$$t_n \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := (-1)^n (a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}),$$

对其进行先行扩张，并称它为循环算子(cyclic operator). 定义

$$N := 1 + t + \cdots + t^n$$

为 $t$ 对应的范数算子(norm operator).

**引理 7.2.** 如上提到的算子满足

$$(1-t)\bar{\partial} = \partial(1-t), \\ \bar{\partial}N = N\partial,$$

其中 $\partial$ 是Hochschild复形的边缘映射 $\partial_n : C_n(A, M) \rightarrow C_{n-1}(A, M)$ ,  $\bar{\partial}_n$ 是bar复形的边缘映射 $\bar{\partial}_n : \bar{C}_n(A) \rightarrow \bar{C}_{n-1}(A)$ .

证明. 按定义, □

如上引理说明

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} \\ A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} \\ \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & \\ A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} \\ \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & \\ A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} \end{array}$$

是一个双复形，称为循环双复形(cyclic bicomplex)，记为 $CC_{\bullet,\bullet}(A)$ .

定义. 给定??  $A$ , 称

$$HC_n(A) := H_n(\text{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(A)))$$

为 $A$ 的循环同调(cyclic homology). 在需要时, 用 $HC_n(A|R)$ 来强调基环 $R$ .

事实上, 循环同调 $HC_*(A|R)$ 关于 $A$ 和 $R$ 都有函子性.

注意到 $\text{Coker}(A^{\otimes n+1} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes n+1})$ 是循环群 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 下不变的, 记 $C_n^\lambda(A) := \text{Coker}(A^{\otimes n+1} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes n+1})$ , 引理7.2说明存在如下复形

$$C_\bullet^\lambda(A) := \cdots \rightarrow C_n^\lambda(A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^\lambda(A) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0^\lambda(A)$$

是良定义的, 称为Connes复形(Connes' complex), 记它的同调为 $H_*^\lambda(A)$ . 此时, 存在自然的映射 $p_\bullet : \text{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(A)) \rightarrow C_\bullet^\lambda(A)$ , 它在第一列上是取商, 在其余列上是0.

**命题 7.8.** 若基环 $R$ 包含 $\mathbb{Q}$ 作为子环, 那么诱导的映射 $p_* : HC_*(A) \rightarrow H_*^\lambda(A)$ 是同构.

证明. □

### 7.4.1 Brylinski混合复形

假定 $A$ 是可滤的代数，即 $A$ 子空间的存在递增滤子

$$0 = A_{-1} \subseteq A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots$$

使得 $\bigcup_{q \geq 0} A_q = A$ 且滤子与乘法相容，即 $A_p \cdot A_q \subseteq A_{p+q}$ . 此时，我们可以定义 $A$ 的分次代数

$$\text{Gr } A := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

若 $\text{Gr } A$ 恰好是交换的，那我们可以在上面定义一个Poisson括号 $\{-, -\} : \text{Gr } A \times \text{Gr } A \rightarrow \text{Gr } A$ ，满足

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ,
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ , 和
- $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ .

构造如下：取 $a \in A_p, b \in A_q$ 使得 $f, g$ 是 $a, b$ 在自然投射 $A \rightarrow \text{Gr } A$ 下的像，由于 $\text{Gr } A$ 是交换的， $[a, b] = ab - ba \in A_{p+q}$ 实际上在更小的空间 $A_{p+q-1}$ 中，因此 $\{f, g\}$ 就定义为 $[a, b]$ 在 $(\text{Gr } A)_{p+q-1}$ 中的像.

Brylinski 88'证明了当 $\text{Gr } A$ 是交换，特征0且光滑的时候，存在双复形 $(\Omega_{\text{Gr } A}, \delta, d)$ ，其中 $\delta$ 是在 $\text{Gr } A$ 中微分形式上的阶数为-1的边缘映射，满足

$$\delta(f_0 df_1 \cdots f_q) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \{f_0, f_i\} df_1 \cdots \hat{f}_i \cdots df_q + \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} f_0 d\{f_i, f_j\} df_1 \cdots \hat{f}_i \cdots \hat{f}_j \cdots df_q$$

**定理 7.9** (Kassel 88). 假设 $k$ 是特征为0的域， $A$ 是可滤的代数且 $\text{Gr } A$ 是交换且光滑的代数，满足

$$\text{Gr } A \cong k[x_1, \dots, x_n],$$

则 $HH_q(A) \cong H_q(\Omega_{\text{Gr } A}, \delta)$ ,  $HC_q(A) \cong H_q(\Omega_{\text{Gr } A}, \delta, d)$ .

## 7.5 应用：形变与上同调

几何上，

### 7.5.1 一阶形变

给定 $k$ 代数 $A$ ，我们考虑如下问题： $A$ 上的乘法实际上是一个 $k$ 映射 $A \otimes_k A \rightarrow A$ ，在所有的这样映射的全体 $\text{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$ 中，并不是所有的元素都可以成为乘法——我们依旧要求乘法满足结合律，但这导致对这样元素的讨论变得困难了许多，因此相应的比较系统的方式考虑“切空间”问题，更准确地说，一阶形变的问题.

于是，考虑从旧的乘法中定义一个新的“乘法”

$$a * b := ab + \epsilon f(a, b),$$

其中 $f \in \text{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$ ，那么结合律

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

就具体地写为

$$(ab + \epsilon f(a, b))c + \epsilon f(ab + \epsilon f(a, b), c) = a(bc + \epsilon f(b, c)) + \epsilon f(a, bc + \epsilon f(b, c)),$$

根据 $f$ 的双线性性，上式被化简为

$$abc + \epsilon f(a, b)c + \epsilon f(ab, c) + \epsilon^2 f(f(a, b), c) = abc + \epsilon af(b, c) + \epsilon f(a, bc) + \epsilon^2 f(a, f(b, c)).$$

注意到这里考虑的是一阶问题（即在环 $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 上考虑问题），视 $\epsilon^2 = 0$ ，因此我们得到关于 $f$ 的条件

$$f(a, b)c + f(ab, c) = af(b, c) + f(a, bc), \quad (7.1)$$

它对应于乘法的结合性条件。

另一方面，注意到 $GL_k(A)$ 在 $A$ 上的作用本质上不改变乘法，因此在考虑乘法的时候我们希望去除掉 $GL_k(A)$ 的影响。假定 $T \in GL_k(A)$ 满足

$$T(a) := a + \epsilon g(a),$$

其中 $g \in \text{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$ 。这样， $T$ 对乘法 $- * -$ 的拉回为

$$a *_T b := T(T^{-1}(a) * T^{-1}(b)).$$

由于我们是在环 $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 上考虑问题， $T^{-1} = \text{id} - \epsilon g$ （习题7.8）。直接计算得到

$$\begin{aligned} ab + \epsilon f_T(a, b) &= a *_T b := T(T^{-1}(a) * T^{-1}(b)) \\ &= T(T^{-1}(a)T^{-1}(b) + \epsilon f(T^{-1}(a), T^{-1}(b))) \\ &= T^{-1}(a)T^{-1}(b) + \epsilon f(T^{-1}(a), T^{-1}(b)) + \epsilon g(T^{-1}(a)T^{-1}(b) + \epsilon f(T^{-1}(a), T^{-1}(b))) \\ &= (a - \epsilon g(a))(b - \epsilon g(b)) + \epsilon f(a - \epsilon g(a), b - \epsilon g(b)) \\ &\quad + \epsilon g((a - \epsilon g(a))(b - \epsilon g(b)) + \epsilon f(a - \epsilon g(a), b - \epsilon g(b))) \\ &= ab - \epsilon(g(a)b + ag(b)) + \epsilon^2 g(a)g(b) + \epsilon f(a - \epsilon g(a), b - \epsilon g(b)) \\ &\quad + \epsilon g(ab - \epsilon(g(a)b + ag(b)) + \epsilon^2 g(a)g(b) + \epsilon f(a - \epsilon g(a), b - \epsilon g(b))) \\ &= ab - \epsilon(g(a)b + ag(b)) + \epsilon f(a, b) + \epsilon g(ab), \end{aligned}$$

这给出了关系

$$f_T(a, b) = f(a, b) - g(a)b - ag(b) + g(ab). \quad (7.2)$$

综上，我们关心的对象是 $\text{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$ 中满足7.1式的乘法 $f$ 在7.2式下的等价类。

观察如上的关系，这恰好给出了对应

$$\{\text{环 } A \text{ 的一阶形变等价类}\} \leftrightarrow HH^2(A).$$

习题 7.8. 依照上面讨论的记号，求证

$$T^{-1}(a) = a - \epsilon g(a).$$

例 7.6. 考虑  $k$  代数  $A := k[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ , 作为  $k$  向量空间它有一组基  $\{1, \sigma\}$ , 满足  $\sigma^2 = 1$ . 上闭链条件 7.1 给出关系

$$\begin{aligned} f(1, 1)1 + f(1, 1) &= 1f(1, 1) + f(1, 1) \\ f(1, 1)\sigma + f(1, \sigma) &= 1f(1, \sigma) + f(1, \sigma) \\ f(1, \sigma)1 + f(\sigma, 1) &= 1f(\sigma, 1) + f(1, \sigma) \\ f(1, \sigma)\sigma + f(\sigma, \sigma) &= 1f(\sigma, \sigma) + f(1, \sigma^2) \\ f(\sigma, 1)1 + f(\sigma, 1) &= \sigma f(1, 1) + f(\sigma, 1) \\ f(\sigma, 1)\sigma + f(\sigma, \sigma) &= \sigma f(1, \sigma) + f(\sigma, \sigma) \\ f(\sigma, \sigma)1 + f(\sigma^2, 1) &= \sigma f(\sigma, 1) + f(\sigma, \sigma) \\ f(\sigma, \sigma)\sigma + f(\sigma^2, \sigma) &= \sigma f(\sigma, \sigma) + f(\sigma, \sigma^2), \end{aligned}$$

去掉平凡等式与重复的等式, (考虑到交换性) 有关系

$$\begin{aligned} f(1, \sigma) &= f(\sigma, 1) \\ f(1, \sigma) &= \sigma f(1, 1). \end{aligned}$$

于是,  $f$  可由如下定义给出:

$$\begin{aligned} f(1, 1) &:= c_1 + c_2\sigma \\ f(1, \sigma) &:= c_2 + c_1\sigma \\ f(\sigma, 1) &:= c_2 + c_1\sigma \\ f(\sigma, \sigma) &:= c_3 + c_4\sigma, \end{aligned}$$

其中  $c_1, \dots, c_4 \in k$  是常数. 另一方面, 记

$$\begin{aligned} g(1) &:= a_1 + a_2\sigma \\ g(\sigma) &:= a_3 + a_4\sigma, \end{aligned}$$

那么上边缘给出

$$\begin{aligned} dg(1, 1) &= a_1 + a_2\sigma \\ dg(1, \sigma) &= a_2 + a_1\sigma \\ dg(\sigma, 1) &= a_2 + a_1\sigma \\ dg(\sigma, \sigma) &= (2a_4 - a_1) + (2a_3 - a_2)\sigma, \end{aligned}$$

上面的计算恰好说明每一个上闭链都是上边缘, 即  $HH^2(A) = 0$ .

例 7.7. 考虑  $k$  代数  $A := k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ , 依照例 7.6 中的计算方法 (不同的是这里  $\epsilon^2 = 0$ ), 可以得到

$$\begin{aligned} f(1, 1) &:= c_1 + c_2\epsilon \\ f(1, \epsilon) &:= c_1\epsilon \\ f(\epsilon, 1) &:= c_1\epsilon \\ f(\epsilon, \epsilon) &:= c_3 + c_4\epsilon, \end{aligned}$$

上边缘给出关系

$$\begin{aligned} dg(1, 1) &= a_1 + a_2\epsilon \\ dg(1, \epsilon) &= a_1\epsilon \\ dg(\epsilon, 1) &= a_1\epsilon \\ dg(\epsilon, \epsilon) &= a_3\epsilon, \end{aligned}$$

这意味着非边缘的上闭链都形如

$$f(\epsilon, \epsilon) = c_3,$$

因此  $HH^2(A) = k$ .

### 7.5.2 高阶形变和

上一节当中我们讨论了一阶形变，对应的同样还有高阶形变，我们首先来讨论所谓的二阶形变。类似之前的定义，记新的乘法为

$$a * b := ab + \epsilon f_1(a, b) + \epsilon^2 f_2(a, b),$$

其中  $f_1, f_2 \in \text{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$ ，如同上一节对结合律的计算，我们不仅得到相同的关系式 7.1

$$f_1(a, b)c + f_1(ab, c) = af_1(b, c) + f_1(a, bc),$$

还得到新的关系式

$$f_1(f_1(a, b), c) - f_1(a, f_1(b, c)) = f_2(a, b)c + f_2(ab, c) - af_2(b, c) - f_2(a, bc), \quad (7.3)$$

容易观察得到等式的右边恰好是  $f_2$  在微分映射下的像  $df_2 \in \text{Hom}(A \otimes_k A \otimes_k A, A)$ .

**定义.** 给定域  $k$  和  $k$  向量空间的上链复形  $(L^\bullet, d^\bullet)_\mathbb{Z}$ ，记  $L := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L^i$ ，若还存在双线性映射

$$[-, -] : L \times L \rightarrow L$$

满足

1. 映射  $[-, -]$  是齐次(homogeneous)且反对称的(skew symmetric)，即  $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$  对任意  $i, j \in \mathbb{Z}$  成立，且对任意齐次元素  $x \in L^i, y \in L^j$ ，

$$[x, y] = (-1)^{\deg x \deg y + 1} [y, x],$$

2. 映射  $[-, -]$  满足分次 Jacobi 等式，即  $x \in L^i, y \in L^j, z \in L^p$ ，

$$(-1)^{\deg x \deg z} [x, [y, z]] + (-1)^{\deg y \deg x} [y, [z, x]] + (-1)^{\deg z \deg y} [z, [x, y]] = 0,$$

3. 微分映射  $d$  满足分次 Leibnitz 恒等式，即  $x \in L^i, y \in L^j$ ，

$$d[x, y] = [dx, y] + (-1)^{\deg x} [x, dy],$$

则称  $(L^\bullet, [-, -], d^\bullet)$  是一个微分分次 Lie 代数(differential graded Lie algebra).

这里奇妙的事情是存在合适的定义方式使得计算Hochschild上同调的复形是一个微分分次Lie代数.

**定义.** 给定  $f \in \text{Hom}_k(A^{\otimes m+1})$ ,  $g \in \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1})$ , 对任意  $i = 1, \dots, m+1$ , 定义  $f \circ_i g \in \text{Hom}_k(A^{\otimes n+m+1})$

$$f \circ_i g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n+1}) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+n}) \otimes \cdots \otimes a_{m+n+1}).$$

进而可以定义circle product

$$f \circ g := \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{(i+1)n} f \circ_i g.$$

**引理 7.3.** 给定  $f \in \text{Hom}_k(A^{\otimes m+1})$ ,  $g \in \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1})$ , 若定义 cup product

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n+2}) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+1})g(a_{m+2} \otimes \cdots \otimes a_{m+n+2}),$$

则

$$d(f \circ g) = f \circ dg + (-1)^n df \circ g + (-1)^{(m+1)(n+1)+n} f \smile g + (-1)^{n+1} g \smile f.$$

**命题 7.10.** Gerstenhaber括号

$$[f, g] := f \circ g - (-1)^{\deg f \deg g} g \circ f$$

和  $-d$  使得  $(\text{Hom}_k(A^{\otimes \bullet+1}), [-, -], -d)$  成为一个微分分次Lie代数.

证明.

□

**推论 7.10.1.** 若  $f \in \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, A)$  是上闭链, 那么  $[f, f] \in \text{Hom}_k(A^{\otimes 2n+1}, A)$  也是上闭链.

回到原来的问题, 注意到

$$f_1 \circ f_1(a \otimes b \otimes c) = 2f_1(f_1(a \otimes b) \otimes c) - 2f_1(a \otimes f_1(b \otimes c))$$

恰好是等式7.3的左边的两倍, 因此7.3式可重新写为

$$\frac{1}{2}[f_1, f_1] = df_2.$$

又由于  $f_2$  是上闭链, 这说明存在二阶形变

$$a * b := ab + \epsilon f_1(a, b) + \epsilon^2 f_2(a, b),$$

是以  $f_1$  为截断的一阶形变的扩张当且仅当

$$0 = [f_1, f_1] \in HH^3(A),$$

因此称  $[f_1, f_1]$  (的等价类) 为一阶形变  $ab + \epsilon f_1$  扩张到二阶形变  $ab + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2$  的阻碍(obstruction).

借助如上的工具, 记  $A$  中的乘法为

$$\begin{aligned} m : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto ab, \end{aligned}$$

那么结合律

$$m(m(a, b), c) = m(a, m(b, c))$$

可以等价地写为

$$[m, m] = 0,$$

Leibnitz法则

$$d(m(a, b)) = m(d(a), b) + m(a, d(b))$$

可写为

$$[d, m] = 0,$$

而 Hochschild 微分

$$d(f) = [m, f]$$

对任意  $f \in \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, A)$  都成立.

例 7.8.

对于更一般  $n$  阶扩张的情形, 我们实际上是在考虑系数环  $k[\epsilon]/(\epsilon^{n+1})$  上的情形, 如同之前的计算对比每个  $\epsilon^k$  的系数有方程

$$\sum_{i+j=0}^k f_j(a, f_i(b, c)) = \sum_{i+j=0}^k f_j(f_i(a, b), c),$$

当  $k = 0$  时这恰好是  $A$  中的乘法

## 7.6 函子上同调\*

给定交换环  $R$  和小范畴  $\mathcal{C}$ , 记  $\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$  (对应的,  $\mathbf{Mod}-\mathcal{C}$ ) 为所有  $\mathcal{C}$  到  $R-\mathbf{Mod}$  的协变函子 (对应的, 反变函子) 组成的范畴. 根据例 A.4, 这也是一个 Abel 范畴.

例 7.9. 给定含幺  $R$  代数  $A$ , 考虑  $\underline{A}$ , 定义为只含一个对象  $*$  的范畴, 且  $\text{hom}_{\underline{A}}(*, *) = A$ , 态射的复合是  $A$  中的乘法.

设  $M$  是右  $A$  模, 即反变函子  $\underline{M} : \underline{A} \rightarrow R-\mathbf{Mod}$ . 此时, 函子给定了一个  $R-\mathbf{Mod}$  中的对象  $M := \underline{M}(*)$ , 对任意态射  $a, b \in A = \text{hom}_{\underline{A}}(*, *)$ , 记

$$\begin{aligned} \underline{M}(a) : M &\rightarrow M \\ m &\mapsto m \cdot a, \end{aligned}$$

于是反变原则说明

$$m \cdot (ab) = \underline{M}(ab)(m) = \underline{M}(b)\underline{M}(a)(m) = \underline{M}(b)(m \cdot a) = (m \cdot a) \cdot b,$$

这恰好是一个右  $A$  模. 反过来, 按如上的对应方式一个右  $A$  模也同时给出了一个右  $\underline{A}$  模.

例 7.10. 我们接着例7.9继续讨论，给出一个张量积范畴化的定义。首先回顾如下定义：设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴， $\mathcal{D}$ 是一个上完备的局部小范畴，考虑2函子

$$S : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D},$$

那么我们称 $f_*$ 与 $f^*$ 的上等值子

$$\prod_{f: A_0 \rightarrow A_1} S(A_0, A_1) \rightrightarrows \prod_{A \in \text{ob } \mathcal{C}} S(A, A)$$

为 $S$ 的上终止(co-end)，其中 $f_*$ 是复合 $S(A_0, A_1) \xrightarrow{S(f, \text{id})} S(A_1, A_1) \hookrightarrow \prod_{A \in \text{ob } \mathcal{C}} S(A, A)$ ， $f^*$ 是复合 $S(A_0, A_1) \xrightarrow{S(\text{id}, f)} S(A_0, A_0) \hookrightarrow \prod_{A \in \text{ob } \mathcal{C}} S(A, A)$ ，记为 $\int_{A \in \text{ob } \mathcal{C}} S(A, A)$ 。

给定右 $R$ 模 $M$ 和左 $R$ 模 $N$ ，那么我们有自然的2函子

$$\begin{aligned} S : \underline{\mathcal{A}}^\circ \times \underline{\mathcal{A}} &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ (*, *) &\mapsto M \otimes_{\mathbb{Z}} N \\ (f, g) &\mapsto f \otimes g, \end{aligned}$$

我们来验证，上终止 $\int_{\underline{\mathcal{A}}} S = M \otimes_R N$ 。

但为了

**定义.** 给定幺半小范畴 $\mathcal{C}$ ，若 $\mathcal{C}$ 中的对象与 $\mathbb{N}$ 对应（于是对象被记为 $\{[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ ），且幺半结构同于自然数的加法结构，即

$$[n] \otimes [m] = [n + m],$$

则称范畴 $\mathcal{C}$ 为一个PROP。

例 7.11. 记**FinSet**<sub>\*</sub>是具有基点的所有有限集合组成的范畴，即

1. **FinSet**<sub>\*</sub>的对象包括 $\{[n] := \{0, 1, \dots, n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ，其中 $0 \in [n]$ 是集合的基点，
2. **FinSet**<sub>\*</sub>的态射包括所有保基点的集合映射的全体，
3. **FinSet**<sub>\*</sub>的幺半结构由楔积给出，即

$$[n] \wedge [m] = [n + m],$$

明显地这是一个PROP。

**引理 7.4.** 函子 $R[\hom_{\mathcal{C}}([n], -)]$ 和 $R[\hom_{\mathcal{C}}(-, [n])]$ 都是投射的。

证明. 给定左 $\mathcal{C}$ 模 $F, G$ 和满射 $\tau : F \Rightarrow G$ ，我们需要证明对任意的态射 $\alpha : R[\hom_{\mathcal{C}}([n], -)]$ ，都有提升

$$\begin{array}{ccccc} & & R[\hom_{\mathcal{C}}([n], -)] & & \\ & \swarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow \alpha & \\ F & \xrightleftharpoons[\tau]{\quad} & G & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

注意到对任意的左模  $H, K : \mathcal{C} \Rightarrow R - \mathbf{Mod}$ ,  $\text{Nat}(H, K)$  也有自然的  $k$  模结构, 满足

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)_A &:= \alpha_A + \beta_A, \\ (r\alpha)_A &:= r\alpha_A. \end{aligned}$$

记  $h^n := R[\text{hom}_{\mathcal{C}}([n], -)]$  是由集合  $\text{hom}_{\mathcal{C}}([n], -)$  生成的自由  $R$  模, 因此 Yoneda 引理中的自然同构

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Nat}(h^n, G) &\leftrightarrows G([n]) : \Psi \\ \alpha &\mapsto \alpha_{[n]}(\text{id}_{[n]}) \\ \eta^m &\leftrightarrow m \end{aligned}$$

是  $R$  模的同构, 其中  $\eta^m$  是自然变换

$$\begin{aligned} \eta^m : \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, -) &\Rightarrow F \\ \eta_B^m : \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\rightarrow F(B) \\ h &\mapsto F(h)(m). \end{aligned}$$

这意味着在此 Yoneda 对应下,  $\alpha$  对应到  $G([n])$  中的某个元素  $m$ , 例 A.4 说明

$$\tau_{[n]} : F([n]) \rightarrow G([n])$$

是满射, 因此存在  $\tilde{m} \in F([n])$  使得  $\tau_{[n]}(\tilde{m}) = m$ , 记  $\tilde{\alpha}$  是  $\tilde{m}$  在 Yoneda 映射下对应的自然变换, Yoneda 的自然性说明了最初图的交换性, 得证.

对函子  $R[\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, [n])]$  的证明是相同的. □

由此, 我们对于  $\mathcal{C}$  中的对象, 记  $h_A := R[\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, A)]$  和  $h^A := R[\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, -)]$ .

**命题 7.11.** 若范畴  $\mathcal{C}$  是 PROP, 那么  $\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$  有足够多的投射和内射对象.

证明. 考虑

$$\bigoplus_{\substack{A \in \text{ob } \mathcal{C} \\ a \in F(A)}} h_A \Rightarrow F,$$

其中自然变换  $h_A \Rightarrow F$  由 Yoneda 引理对应到元素  $a \in F(A)$  给出 □

自然地可以构造 (双) 函子

$$- \otimes_{\mathcal{C}} - : \mathbf{Mod} - \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \mathbf{Mod} \rightarrow R - \mathbf{Mod},$$

使得

$$G \otimes_{\mathcal{C}} F = \left( \bigoplus_{A \in \text{ob } \mathcal{C}} G(A) \otimes_k F(A) \right) \Big/ \langle (G(f)(x)) \otimes y - x \otimes (F(f)(y)) \rangle_{\substack{x \in G(B), y \in F(A), \\ A, B \in \text{ob } \mathcal{C}, \\ f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)}},$$

或者可以表示为

$$F \otimes_{\mathcal{C}} G \cong \text{coeq}(\bigoplus_{f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)} G(B) \otimes_R F(A) \xrightarrow[f^*]{f_*} \bigoplus_{A \in \text{ob } \mathcal{C}} G(A) \otimes_R F(A)),$$

其中对任意的  $x \in G(B), y \in F(A)$ ,  $f^*(x \otimes y) := x \otimes F(f)(y), f_*(x \otimes y) := G(f)(x)) \otimes y$ .

例 7.12. 设  $R$  是环,  $F, G$  是函子  $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Mod}-R$  和  $G : \mathcal{C} \rightarrow R-\mathbf{Mod}$ . 定义函子  $S := F \boxplus_R G : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , 将对象  $(A, B)$  映为  $F(A) \otimes_R G(B)$ , 将态射  $(f : C \rightarrow A, g : B \rightarrow D)$  映到  $F(f) \boxtimes_R G(g) : F(A) \otimes_R G(B) \rightarrow F(C) \otimes_R G(D), x \otimes y \mapsto F(f)(x) \otimes G(g)(y)$ . 在此基础上定义对象

$$F \otimes_{A, R} G := \int^{A \in \text{ob } \mathcal{C}} F(f) \boxtimes_R G(g).$$

若函子  $R^\circ[\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, A)] : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Mod}-R$ , 将对象  $C$  映到  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$  生成的自由  $R$  模, 证明

$$R^\circ[\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, A)] \otimes_{A, R} G \cong G(A).$$

证明对  $R$  作为自己的右模的常值函子  $\text{Const}_R : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Mod}-R$  满足

$$\text{Const}_R \otimes_{A, R} G \cong \text{colim}_{\mathcal{C}} G.$$

例 7.13. 记  $R$  是映到  $R$  作为  $R$  模本身的常值函子 (将  $\mathcal{C}$  中的所有态射映到恒同态射), 那么

$$F \otimes_{\mathcal{C}} R \cong \text{colim}_{\mathcal{C}} F.$$

这里直接应用了余极限的计算方法. 对于任意函子  $F : J \rightarrow \mathcal{D}$ ,

$$\text{colim}_J F \cong \text{coeq} \left[ \coprod_{f \in \text{mor } J} F(\text{dom } f) \xrightarrow[f^*]{f_*} \coprod_{j \in J} F(j) \right],$$

其中  $f^*$  是由  $\text{id} : F(\text{dom } f) \rightarrow F(\text{dom } f)$  诱导的态射,  $f_*$  是由  $F(f) : F(\text{dom } f) \xrightarrow{f} F(\text{codom } f)$  诱导的态射. 按定义

$$F \otimes_{\mathcal{C}} R \cong \text{coeq} \left[ \bigoplus_{f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)} F(B) \otimes_R R \xrightarrow[f^*]{f_*} \bigoplus_{A \in \text{ob } \mathcal{C}} F(A) \otimes_R R \right],$$

此时按定义中的元素写出来,  $f^*$  恰好是由  $\text{id} : F(\text{dom } f) \rightarrow F(\text{dom } f)$  诱导的态射,  $f_*$  恰好是由  $F(f) : F(\text{dom } f) \xrightarrow{f} F(\text{codom } f)$  诱导的态射, 注意到  $R-\mathbf{Mod}$  中的余积是直和, 这就完成了证明.

习题 7.9. 求证

$$F \otimes_{\mathcal{C}} h^n \cong F([n]).$$

证明. 按定义,

特别地, 对任意  $M \in \mathcal{C}-\mathbf{Mod}$  和  $N \in \mathbf{Mod}-\mathcal{C}$ ,  $\text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(M, N)$  是有意义的.

例 7.14. 考虑  $\mathcal{C} = \mathbf{FinSet}_*$  的情形 (见例 7.11), 给定交换  $k$  代数  $A$  和对称  $A-A$  双模  $M$ , 定义函子

$$\begin{aligned} L(A, M) : \mathbf{FinSet}_* &\rightarrow k-\mathbf{Vec} \\ [n] &\mapsto M \otimes_k A^{\otimes n}, \end{aligned}$$

并且对于任意  $f : [n] \rightarrow [m]$ ,  $L(A, M)(f)$  定义为

$$\begin{aligned} M \otimes_k A^{\otimes n} &\rightarrow M \otimes_k A^{\otimes m} \\ a_0 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto b_0 \otimes \cdots \otimes b_m, \end{aligned}$$

其中

$$b_j := \prod_{f(i)=j} a_i, \quad j = 0, \dots, m.$$

这里有几个技术性的条件：我们要求有限集是带基点的原因在于  $L(A, M)([n]) = M \otimes_k A^{\otimes n}$  中的元素地位并不一样——第0项只能是  $M$  中的元素，不能与其他元素交换位置，但取  $M = A$  时则不需要有这个要求；在  $b_j$  的定义中并没有规定乘法中每个  $a_i$  的位置，这样在  $A$  是交换代数时如上的定义才没有歧义，T.Pirashvili 在 [?] 中讨论了  $A$  非交换的情形。

考虑一组有限集及之间的态射

$$\begin{aligned} (S^1)_n &:= \{(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)\} / \sim, \quad n \in \mathbb{N} \\ d_i^{[n]} &: (S^1)_n \rightarrow (S^1)_{n-1} \\ (a_0, \dots, a_n) &\mapsto (a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n) \end{aligned}$$

其中  $(S^1)_n$  中的数组共  $n+1$  项（这里我们将  $i$  与有  $i$  个 0 的数组等同起来），等价关系定义为  $(0, \dots, 0) \sim (1, \dots, 1)$ 。按照之前的定义，

$$L(A, M)((S^1)_n) = M \otimes_k A^{\otimes n},$$

而  $L(A, M)(d_i^{[n]})$  是

$$\begin{aligned} M \otimes_k A^{\otimes n} &\rightarrow M \otimes_k A^{\otimes n-1} \\ a_0 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto \begin{cases} a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n & i = 0 \\ a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n & i = 1, \dots, n-1 \\ a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} & i = n, \end{cases} \end{aligned}$$

这恰好是 Hochschild 复形。

在例 7.14 中我们给 Hochschild 一个新的解释，

例 7.15.

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{B}G}(k, F) \cong H_i(G; k)$$

例 7.16. 设  $\mathcal{G}$  是  $\mathbf{Gp}$  中所有有限生成自由群组成的满子范畴，于是给定域  $k$ ，

$$\mathrm{lin}_k : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathbf{Gp} \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbf{Ab} \xrightarrow{- \otimes_{\mathbb{Z}} k} k - \mathbf{Vec}$$

那么

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{G}^\circ}(k[G], \mathrm{lin}_k) \cong H_{i+1}(G; k)$$

其中  $H_{i+1}(G; k)$  是群  $G$  以  $k$  为系数的群同调。

$$h^1(\langle n \rangle) = k[\mathrm{hom}_{\mathcal{G}}(\langle 1 \rangle, \langle n \rangle)] = k[\langle n \rangle]$$

$$h^1 \Rightarrow \mathrm{lin}_k,$$

习题 7.10.

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{G}}^i(k[G], \mathrm{lin}_k) \cong ?H^{i+1}(G; k)$$



## 附录 A Abel范畴

一定程度上说，我们构造范畴的目的是抽象出原本一些对象之间的行为，用更一般的方式去理解之前的对象和之间的行为.在代数中，模是一类非常友好的对象，我们希望找到足够抽象的一类对象，他们之间的行为类似于模（或者Abel群），这样的范畴就是Abel范畴.

同调代数中绝大多数的研究对象是Abel范畴中的对象，它们具有许多良好的性质，在这一章中我们将列举绝大部分.但是，同调代数的学习并不需要知道每一个这样性质的来源和证明，甚至在很多情形下一个Abel范畴完全可以看成一个 $R$ 模范畴，虽然这并不准确，但足够对同调代数有正确的理解.这里的建议是大致浏览这一章，知道Abel范畴的定义和一些基本性质，然后进入正式的同调代数的学习，在适当并且需要的时候再去了解和分析Abel范畴中一些性质的证明.

### A.1 Abel范畴

这一节我们不区分范畴内对象的同构和相等，即对象的相等意味着存在同构.

**定义.** 给定范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个单态射 $f_1 : A_1 \rightarrow B, f_2 : A_2 \rightarrow B$ ，若存在 $h : A_1 \leftrightarrows A_2 : k$ 使得图

$$\begin{array}{ccc} A_1 & & \\ \uparrow k & \swarrow h & \\ & B, & \\ \downarrow & \nearrow f_2 & \\ A_2 & & \end{array}$$

是交换的，则称单态射 $f_1 : A_1 \rightarrow B, f_2 : A_2 \rightarrow B$ 是等价的(equivalent).对偶地，给定范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个满态射 $g_1 : B \rightarrow C_1, g_2 : B \rightarrow C_2$ ，若存在 $h : C_1 \leftrightarrows C_2 : k$ 使得图

$$\begin{array}{ccc} & C_1 & \\ & \uparrow g_2 & \\ B & \swarrow g_1 & \uparrow k \\ & \searrow & \downarrow h \\ & C_2 & \end{array},$$

是交换的，则称满态射 $f_1 : A_1 \rightarrow B, f_2 : A_2 \rightarrow B$ 是等价的(equivalent).称 $B$ 的单态射的等价类为 $B$ 的子对象(subobject)， $B$ 的满态射的等价类为 $B$ 的商对象(quotient object).

于是, 对任意单态射  $A \hookrightarrow B$ , 它的等价类是  $B$  的一个子对象, 记为  $A \subseteq B$ , 同样地, 对任意一个满态射  $B \twoheadrightarrow C$ , 它的等价类是  $B$  的一个商对象, 记为  $C = B / \sim$ .

习题 A.1. 求证若  $f_1 : A_1 \rightarrow B, f_2 : A_2 \rightarrow B$  都是单态射, 那么满足交换图

$$\begin{array}{ccc} A_1 & & \\ \downarrow h & \searrow f_1 & \\ & B, & \\ & \nearrow f_2 & \\ A_2 & & \end{array}$$

的  $h : A_1 \rightarrow A_2$  是单射.

若  $A_1 \rightarrow B, A_2 \rightarrow B$  分别是某个子对象的代表元, 且存在  $A_1 \rightarrow A_2$  使图交换, 则称子对象  $A_1$  被子对象  $A_2$  包含. 注意到子对象不具有传递性.

**定义.** 给定范畴  $\mathcal{C}$  中的两个态射  $f, g : X \rightarrow Y$ , 若存在对象  $K$  和态射  $i : K \rightarrow X$  满足

1.  $f \circ i = g \circ i$ ;
2. 若对任意满足  $f \circ h = g \circ h$  态射  $h : Z \rightarrow X$  都存在唯一的分解

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}} & Y, \\ \uparrow h & \nearrow & & & \\ Z & & & & \end{array}$$

则称  $K$  是  $f, g$  的等值子(equalizer).

对偶地, 若存在对象  $C$  和态射  $c : Y \rightarrow C$  满足

1.  $c \circ f = c \circ g$ ;
2. 若对任意满足  $h \circ f = h \circ g$  态射  $h : Y \rightarrow Z$  都存在唯一的分解

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}} & Y & \xrightarrow{c} & C, \\ & & \searrow h & \downarrow & \\ & & Z & & \end{array}$$

则称  $C$  是  $f, g$  的余等值子(coequalizer).

习题 A.2. 给定范畴  $\mathcal{C}$  中的态射  $f, g : X \rightrightarrows Y$ , 若它们的余等值子  $c : Y \rightarrow C$  存在, 则  $c$  是满态射.

证明. 任取  $h, k : C \rightrightarrows W$  满足  $h \circ c = k \circ c$ , 那么由余等值子的定义  $h \circ c \circ f = h \circ c \circ g = k \circ c \circ g$ . 于是余等值子的泛性质存在唯一的  $C \dashrightarrow W$  满足交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y & \xrightarrow{\quad c \quad} & C, \\ & \searrow g & & \swarrow h \circ c = k \circ c & \downarrow \\ & & Z. & & \end{array}$$

但  $h, k : C \rightarrow Z$  都满足交换图，因此由唯一性  $h = k$ . □

### A.1.1 加性范畴

**定义.** 给定范畴  $\mathcal{C}$ , 若其中的始对象和终对象都存在，并且二者相同（即存在对象既是始对象也是终对象），则称该对象为零对象(zero object).

由于对任意其他对象，起始与终止于零对象的态射都只有一个，因而态射  $X \rightarrow 0$  也可以被记为0.类似地，态射  $X \rightarrow Y$  若有分解  $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$ ，则也记为0.

任意给定态射  $f : X \rightarrow Y$ ，那么称  $f$  与0的等值子为  $f$  的核(kernel)，记为  $\ker f$ ；那么称  $f$  与0的余等值子为  $f$  的余核(cokernel)，记为  $\text{coker } f$ .

习题 A.3. 给定小范畴  $\mathcal{C}$  和范畴  $\mathcal{A}$ ，满足  $\mathcal{A}$  中存在零对象，求证范畴  $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  也存在零对象.

证明. 我们需要验证  $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  中的零对象是常值零函子，即函子

$$\begin{aligned} \text{Const}_0 : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{A} \\ A &\mapsto 0. \end{aligned}$$

任意给定函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  和自然变换  $\alpha : F \Rightarrow \text{Const}_0$ ，具体写出来对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $A$ ,

$$\alpha_A : F(A) \rightarrow 0$$

是  $\mathcal{A}$  中的态射.但是0是  $\mathcal{A}$  中的零对象，因此  $\alpha_A = 0$ ，这意味着  $\text{Const}_0$  是终对象.同理它是始对象. □

**引理 A.1.** 给定含有零对象的范畴  $\mathcal{A}$ ，则  $\ker$  和  $\text{coker}$  都是函子  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ .

证明. □

习题 A.4. 给定含零对象范畴中的图

$$W \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z,$$

且任意相邻的态射的复合为0，求证  $X \rightarrow Y$  诱导了相容的

$$C = \text{coker}(W \rightarrow X) \dashrightarrow K = \ker(Y \rightarrow Z),$$

并且这样的态射是唯一的.

证明. 考虑

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 W & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\quad} & Y \longrightarrow Z \\
 & \downarrow & \nearrow & \searrow & \\
 & & C & &
 \end{array}$$

由于  $W \rightarrow X \rightarrow Y = 0$ , 按定义存在  $C \rightarrow Y$  与图交换, 于是  $X \rightarrow C \rightarrow Y \rightarrow Z = 0$ , 根据  $X \rightarrow C$  是满态射 (习题A.2),  $C \rightarrow Y \rightarrow Z = 0$ , 再由  $K$  的泛性质存在  $C \rightarrow K$  与整幅图交换.

唯一性来源于核以及余核的泛性质.  $\square$

给定范畴  $\mathcal{A}$ , 假定其中的有限和和有限积都存在. 注意到始对象是空指标集给出的余积, 终对象是空指标集给出的积, 因此  $\mathcal{A}$  中的始对象和终对象都存在.

**定义.** 给定包含零对象的范畴  $\mathcal{A}$ , 若对任意对象  $X, Y$ , 态射集  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  具有 Abel 群结构, 且满足相容性质

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

和

$$(g + h) \circ k = g \circ k + h \circ k,$$

其中  $f : X \rightarrow Y, g, h : Y \rightrightarrows Z, k : Z \rightarrow W$  是  $\mathcal{A}$  中的态射, 则称  $\mathcal{A}$  是预加性范畴 (pre-additive category),

例 A.1. 给定环  $R$ ,

习题 A.5. 给定预加性范畴  $\mathcal{A}$  和其中的态射  $f : X \rightarrow Y$ , 求证对任意的对象  $W, Z$ ,

$$f_* : \text{hom}_{\mathcal{A}}(W, X) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(W, Y)$$

和

$$f^* : \text{hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

都是 Abel 群同态.

习题 A.6. 证明

**定义.** 给定包含零对象的范畴  $\mathcal{A}$ , 若对任意有限多个对象  $X_1, \dots, X_n$ , 都存在对象  $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$  以及态射

$$\iota_i : X_i \rightarrow X_1 \oplus \dots \oplus X_n$$

和

$$\pi_i : X_1 \oplus \dots \oplus X_n \rightarrow X_i,$$

$1 \leq i \leq n$ , 满足

1.  $\pi_i \circ \iota_i = \text{id}_{A_i}$  对于  $1 \leq i \leq n$  成立,

2.  $\pi_i \circ \iota_j = 0$  对于  $1 \leq i, j \leq n$  且  $i \neq j$  成立,

3.  $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, \{\pi_i\})$  是  $X_1, \dots, X_n$  的积,  $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, \{\iota_i\})$  是  $X_1, \dots, X_n$  的余积,

则称  $\mathcal{A}$  是加性范畴(additive category),  $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, \{\pi_i\}, \{\iota_i\})$  是  $X_1, \dots, X_n$  的双积(biproduct).

给定加性范畴  $\mathcal{A}$  中的对象  $X, Y$ , 记它们的和为  $X + Y$  或  $X \oplus Y$  ( $X \coprod Y$ ), 泛性质诱导的映射分别记为

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} X + Y$$

和

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} X + Y.$$

对应地, 记它们的积为  $X \times Y$  或者  $X \prod Y$ , 泛性质诱导的态射为

$$X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} X$$

和

$$X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Y.$$

进一步地, 若给定了  $f : W \rightarrow X, g : W \rightarrow Y$ , 根据泛性质存在  $W \rightarrow X \times Y$ , 这个映射记为  $(f, g) : W \rightarrow X \times Y$ ; 若给定了  $h : X \rightarrow Z, k : Y \rightarrow Z$ , 根据泛性质存在  $X + Y \rightarrow Z$ , 这个映射记为  $(h \quad k) : X + Y \rightarrow Z$ . 我们举例说明这样的记号使得态射的复合满足矩阵乘法. 考虑给定了  $f : W \rightarrow X, g : W \rightarrow Y$ , 那么复合

$$W \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} X$$

用矩阵乘法写出来恰好是  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f : W \rightarrow X$  (按照习惯, 映射是从右到左记录的), 满足泛性质.

**命题 A.1.** 1. 若范畴  $\mathcal{A}$  是加性范畴, 则它是预加性范畴.

2. 若范畴  $\mathcal{A}$  是预加性范畴, 且满足加性范畴中的前两条性质, 则第三条性质当且仅当

$$\iota_1 \circ \pi_1 + \cdots + \iota_n \circ \pi_n = \text{id}_{X_1 \oplus \cdots \oplus X_n}.$$

证明. 1. 我们需要给加性范畴  $\mathcal{A}$  中的态射集  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  自然的 Abel 群结构.

任意给定  $f, g : X \rightrightarrows Y$ , 定义

$$f + g : X \rightarrow Y := X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}} Y.$$

事实上还有另一种定义方式

$$f + g : X \rightarrow Y := X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}} Y \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} Y,$$

但可以验证二者是相同的.

□

### A.1.2 Abel范畴及其中态射的分解

**定义.** 若范畴  $\mathcal{A}$  满足

1.  $\mathcal{A}$  中零对象存在;
2. 对  $\mathcal{A}$  中任意两个对象  $X, Y$ , 它们的双积存在;
3. 若  $f : X \rightarrow Y$  是  $\mathcal{A}$  中的态射, 则  $\ker f$  与  $\text{coker } f$  存在;
4. 任意单态射 (满足左消去律) 都是某个态射的核, 任意满态射 (满足右消去律) 都是某个态射的余核;

则称  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴 (Abelian category).

习题 A.7. 在 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中, 证明

1. 单态射  $f : X \rightarrow Y$  的核是 0, 满态射  $g : Y \rightarrow Z$  的余核是 0.
2.  $0 \rightarrow X$  的余核是  $X \xrightarrow{\text{id}_X} X$ ,  $Y \rightarrow 0$  的核是  $Y \xrightarrow{\text{id}_Y} Y$ .

**证明.** 由于两个部分都有两个互相对偶的命题, 因此都只证一部分.

1.  $f : X \rightarrow Y$  是单态射, 若  $t : T \rightarrow X$  使得  $f \circ t = 0$ , 那么那么有  $T \rightarrow X \rightarrow Y = 0 \rightarrow X \rightarrow Y$ , 根据消去律  $t = 0$ , 这意味着  $T \rightarrow X$  有分解  $T \rightarrow 0 \rightarrow X$ .

2. 这是因为对任意  $k : X \rightarrow Z$ ,  $0 \rightarrow X \rightarrow Z = 0$ . □

按定义,  $\ker f$  给出了  $X$  的一个子对象,  $\text{coker } f$  给出了  $Y$  的一个商对象. 记  $\mathbf{S}X$  是范畴  $\mathcal{C}$  中对象  $X$  的所有子对象全体,  $\mathbf{Q}X$  是  $X$  的所有商对象全体, 那么  $\ker$  和  $\text{coker}$  给出了一对映射

$$\ker : \mathbf{Q}X \leftrightarrows \mathbf{S}X : \text{coker},$$

其中  $\ker$  将一个满态射给出它的核,  $\text{coker}$  将单态射给出它的余核.

习题 A.8. 验证如上所述的映射是良定义的.更一般地, 证明一个态射的ker是单态射, coker是满态射.

证明. 我们需要验证两方面: 单态射的coker是满态射 (对偶地满态射的ker是单态射), 且ker把等价的满态射映到等价的单态射 (对偶地coker把等价的单态射映到等价的满态射).

给定态射  $f : X \rightarrow Y$ , 我们要验证  $Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y)$  有右消去律, 即对任意的  $k, l : \text{coker}(X \rightarrow Y) \rightrightarrows Z$ , 若  $k \circ \text{coker}(X \rightarrow Y) = l \circ \text{coker}(X \rightarrow Y)$ , 那么  $k = l$ . 考虑  $k - l : \text{coker}(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$ , 由于  $k \circ \text{coker}(X \rightarrow Y) = l \circ \text{coker}(X \rightarrow Y)$ ,  $(k - l) \circ \text{coker}(X \rightarrow Y) = 0 : Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$ , 这意味着复合映射  $X \rightarrow Y \rightarrow Z = 0$ , 按照coker的定义, 存在唯一的态射  $\text{coker}(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$  使得  $Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$  是 0 的分解; 但如同之前所述,  $k - l$  满足分解,  $0 : \text{coker}(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$  同样满足分解, 因此  $k - l = 0$ , 即  $k = l$ .

或者习题A.2直接说明了这件事.

假设  $X_1 \rightarrow Y$  和  $X_2 \rightarrow Y$  是等价的单态射, 那么存在态射  $i : X_1 \leftrightarrows X_2 : j$  使得

$$\begin{array}{ccc} X_1 & & Y \\ \uparrow j & \swarrow i & \downarrow \\ & Y & \\ \downarrow & f_1 & \nearrow \\ & & Y_2 \\ \downarrow & f_2 & \nearrow \end{array}$$

是交换的, 根据coker的函子性存在交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{coker}(X_1 \rightarrow Y) & & \\ & \nearrow g_2 & \uparrow & \downarrow & \\ Y & & \text{coker } j & & \text{coker } i \\ & \searrow g_1 & & & \\ & & \text{coker}(X_2 \rightarrow Y) & & , \end{array}$$

因此将等价类映到等价类.

□

**命题 A.2.** ker和coker是Abel范畴  $\mathcal{A}$  下的互逆映射.

证明. 给定单态射  $f : X \rightarrow Y$ , 于是它是某个态射  $Y \rightarrow Z$  的核. 取  $C = \text{coker } f$ , 于是存在唯一的态射  $C \rightarrow Z$  使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \ker(Y \rightarrow Z) = X & & C = \text{coker } f \\ \downarrow & \nearrow f & \downarrow \\ & Y & \\ \ker(Y \rightarrow C) = K & \nearrow k & \searrow \\ & & Z. \end{array}$$

注意到复合  $X \rightarrow Y \rightarrow C = 0$ , 于是根据核的泛性质存在  $X \dashrightarrow K$  使得上图是交换的; 同理,  $K \rightarrow Y \rightarrow Z = K \rightarrow Y \rightarrow C \rightarrow Z = 0 \rightarrow Z = 0$ , 存在  $K \dashrightarrow X$  使得图是交换的, 于是据定义  $X \xrightarrow{f} Y$  与  $K \xrightarrow{k} Y$  是等价的子对象.

注意到,  $\text{coker}$  将态射  $f : X \rightarrow Y$  映到  $Y \rightarrow C = \text{coker } f$ ,  $\ker$  再将  $Y \rightarrow C = \text{coker } f$  映到  $k : \ker(Y \rightarrow C) = K \rightarrow Y$ , 于是  $f : X \rightarrow Y$  等价于  $\text{coker}(\ker(f))$ , 因此  $\text{coker} \circ \ker = \text{id}_{\mathbf{S}X}$ . 同理, 对偶地可以证明  $\ker \circ \text{coker} = \text{id}_{\mathbf{Q}X}$ .  $\square$

**推论 A.2.1.** 若  $X_1 \rightarrow Y$  和  $X_2 \rightarrow Y$  是等价的单态射, 那  $X_1 \rightarrow Y$  和  $X_2 \rightarrow Y$  是同构的.

证明. 设  $C = \text{coker}(X_1 \rightarrow Y)$ ,  $K = \ker(Y \rightarrow C)$ , 于是根据命题  $X_1$  (因此  $X_2$ ) 与  $K$  是等价的. 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} & K & & & \\ & \downarrow g & \searrow k & & \\ X_1 & \xrightarrow{i} & Y & \longrightarrow & C \\ & \downarrow f & \nearrow k & & \\ & K & & & \end{array},$$

于是

$$\begin{aligned} K \rightarrow X_1 \rightarrow K \rightarrow Y \rightarrow C &= K \rightarrow X_1 \rightarrow Y \rightarrow C \\ &= K \rightarrow Y \rightarrow C = 0, \end{aligned}$$

但根据核的泛性质, 存在唯一的  $\text{id} : K \rightarrow K$  使得上图交换, 因此  $f \circ g = \text{id}_K$ , 即  $X_1 \rightarrow Y \cong K \rightarrow Y$ , 这就证明了结论.  $\square$

**推论 A.2.2.** 在 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中,  $C = \text{coker } f$  是单态射  $f : X \rightarrow Y$  的余核, 那么  $f : X \rightarrow Y$  是  $Y \rightarrow C$  的核. 对偶地,  $K = \ker g$  是满态射  $g : Y \rightarrow Z$  的余核, 那么  $k : K \rightarrow Y$  是  $Y \rightarrow Z$  的核.

证明. 根据定义,  $\text{coker}(X \rightarrow Y) = Y \rightarrow C$ , 于是根据之前的命题

$$X \rightarrow Y \cong \ker(\text{coker}(X \rightarrow Y)) = \ker(Y \rightarrow C).$$

对偶性说明后半部分也是正确的.  $\square$

**定义.** 设  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴,  $X$  是  $\mathcal{A}$  的对象,  $Y$  是  $X$  的子对象,  $Z$  是  $Y$  的子对象, 则  $Y/Z$  称为  $X$  的一个子商 (subquotient).

习题 A.9. 证明  $\ker$  和  $\text{coker}$  是反序的映射.

证明.  $\square$

**定理 A.3.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是 Abel 范畴中的态射, 且  $f$  同时是单态射和满态射, 则  $f$  是同构.

证明. 由于  $f : X \rightarrow Y$  是满射,  $0$  是  $\text{coker } f$ .  $Y \xrightarrow{\text{id}_Y} Y$  是  $Y \rightarrow 0$  的核, 且根据前面的命题,  $f : X \rightarrow Y$  也是  $Y \rightarrow 0$  的核, 因此根据核的泛性质,  $Y \xrightarrow{\text{id}_Y} Y$  与  $f : X \rightarrow Y$  是同构的, 这说明了  $f$  本身也是同构.  $\square$

设 $W, X$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 $Y$ 的两个子对象，那么称同时为 $W$ 和 $X$ 的子对象的 $Y$ 的子对象的极大子对象为 $W$ 与 $X$ 的交(intersection)，记为 $W \cap X$ .

**命题 A.4.** Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中元素 $Y$ 的任意两个子对象 $W, X$ 都有交.

证明. 令 $Z = \text{coker}(W \rightarrow Y)$ ,  $K = \ker(X \rightarrow Y \rightarrow Z)$ , 于是

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & Y \longrightarrow Z \end{array}$$

中 $K \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z = 0$ , 由推论A.2.2,  $W$ 是的 $Y \rightarrow Z$ 的核, 因此存在唯一的 $K \dashrightarrow W$ 使得图是交换的.

接下来只要证明对任意 $Y$ 的子对象 $S$ , 若它同时还是 $X$ 和 $W$ 的子对象, 则它是 $K$ 的子对象. 给定交换图

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & X \\ j \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

使得 $i : S \rightarrow X$ 和 $j : S \rightarrow W$ 都是单态射, 那么 $S \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z = S \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow Z = (S \rightarrow W) \circ 0 = 0$ , 于是存在唯一的态射 $S \rightarrow K$ 使得 $S \rightarrow K \rightarrow X = i$ . 同时, 再根据 $W$ 是的 $Y \rightarrow Z$ 的核, 存在唯一的 $j : S \rightarrow W$ 使得图交换, 但 $S \rightarrow K \dashrightarrow W$ 也满足该交换图, 因此 $S \rightarrow K \dashrightarrow W = j$ . 这意味着 $K$ 是 $W, X$ 的交.  $\square$

**推论 A.4.1.** 设 $f : Y \rightarrow X$ 和 $g : Z \rightarrow X$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的单态射, 则存在纤维积 $Y \times_X Z$ .

证明. 由于 $f, g$ 都是单态射, 存在它们的交, 记为 $i : K \rightarrow X, j : K \rightarrow Y$ . 任取 $W \xrightarrow{h} Y, W \xrightarrow{k} Z$ 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h} & Y \\ k \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X, \end{array}$$

令 $C = \text{coker}(Z \rightarrow X)$ , 于是 $W \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow C = W \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow C = W \rightarrow 0 = 0$ , 根据前面的证明,  $K$ 是 $Y \rightarrow X \rightarrow C$ 的核因此存在唯一的 $W \dashrightarrow K$ 使得图(不包括蓝色部分)

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{h} & Y & & \\ \text{---} \swarrow & & \searrow & & \\ & K & \xrightarrow{i} & Y & \\ & j \downarrow & & \downarrow & \\ Z & \longrightarrow & X & \longrightarrow & C \end{array}$$

是交换的, 并且

$$(W \xrightarrow{h} Y \rightarrow X) \rightarrow C = (W \dashrightarrow K \rightarrow Z \rightarrow X) \rightarrow C = 0,$$

注意到 $Z$ 是 $X \rightarrow C$ 的核因此有唯一的分解 $W \xrightarrow{k} Z \rightarrow X \rightarrow C$ ; 但是 $k : W \rightarrow Z$ 和 $W \dashrightarrow K \rightarrow Z$ 都满足分解, 因此如上的图是交换的.

我们再来证明这样的 $W \dashrightarrow K$ 是唯一的. 对于任意满足交换图的态射 $g : W \rightarrow K$ , 它必然是 $W \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow C = 0$ 的分解, 因此根据 $K = \ker(Y \rightarrow X \rightarrow C)$ 分解是唯一的.  $\square$

**命题 A.5.** 对任意Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : X \rightarrow Y$ 和 $g : X \rightarrow Y$ , 它们的等值子存在.

证明. 考虑 $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}} X \times Y$ 和 $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix}} X \times Y$ , 它们都有左逆因此都是单态射, 由前面的命题存在交, 记为 $K$ , 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i} & X \\ j \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} \\ X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix}} & X \times Y, \end{array}$$

其中 $K$ 是拉回. 再次根据左逆的存在性,  $i = j$ , 于是按定义拉回的泛性质说明 $K$ 是 $f, g$ 的等值子.  $\square$

**定理 A.6.** 设 $f : Y \rightarrow X$ 和 $g : Z \rightarrow X$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射, 则存在纤维积 $Y \times_X Z$ .

证明. 考虑

$$\begin{array}{ccc} Y \times Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X, \end{array}$$

它们的等值子满足相应的泛性质, 因此定理成立.  $\square$

**习题 A.10.** 给定环 $R$ , 求证范畴 $R - \mathbf{Mod}$ 中的纤维积存在.

证明. 给定 $R - \mathbf{Mod}$ 中的同态 $f : M \rightarrow P, g : N \rightarrow P$ , 定义

$$M \times_P N := \{(m, n) \in M \times N \mid f(m) = g(n)\}$$

和同态 $p_1 : M \times_P N \rightarrow M, (m, n) \mapsto m$ 与 $p_2 : M \times_P N \rightarrow N, (m, n) \mapsto n$ , 这样只需要验证 $(M \times_P N, p_1, p_2)$ 满足相应的泛性质即可.

任取

$\square$

**定义.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : X \rightarrow Y$ , 称

$$\ker \text{coker } f$$

为 $f$ 的像(image), 记为 $\text{im } f$ .

**命题 A.7.** Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : X \rightarrow Y$ 的像是使得复合

$$X \rightarrow \text{im } f \rightarrow Y$$

是 $f : X \rightarrow Y$ 的最小的 $Y$ 的子对象.

证明. 首先我们证明,  $Y$ 的子对象 $S \hookrightarrow Y$ 使得分解 $X \rightarrow S \rightarrow Y = X \rightarrow Y$ 存在当且仅当 $X \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(S \hookrightarrow Y) = 0$ . 一方面, 若 $Y$ 的子对象 $S \hookrightarrow Y$ 使得分解 $X \rightarrow S \rightarrow Y = X \rightarrow Y$ 存在, 那么 $X \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(S \hookrightarrow Y) = X \rightarrow S \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(S \hookrightarrow Y) = X \rightarrow 0 = 0$ ; 另一方面, 若 $Y$ 的子对象 $S \hookrightarrow Y$ 使得 $X \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(S \hookrightarrow Y) = 0$ , 根据推论A.2.2,  $S \rightarrow Y$ 是 $Y \rightarrow \text{coker}(S \hookrightarrow Y)$ 的核, 因此存在 $X \rightarrow S$ 使得 $X \rightarrow S \rightarrow Y = X \rightarrow Y$ .

根据命题A.2,  $\text{coker}(\text{im } f) = \text{coker}(\ker(\text{coker}(X \rightarrow Y))) = \text{coker}(X \rightarrow Y)$ , 因此 $X \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(\text{im } f) = 0$ , 于是根据 $\text{coker}$ 的泛性质存在分解

$$X \rightarrow \text{im } f \rightarrow Y = X \rightarrow Y.$$

若还有另一个分解 $X \rightarrow J \rightarrow Y = X \rightarrow Y$ , 由前一段的讨论,  $X \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(J \rightarrow X) = 0$ , 因此存在(满)态射 $\text{coker}(X \rightarrow Y) = \text{coker}(\text{im } f) \rightarrow \text{coker}(J \rightarrow X)$ , 根据 $\ker$ 的函子性这对应了唯一的(单)态射 $\text{im } f = \ker(\text{coker}(X \rightarrow Y)) \xrightarrow{\varphi} J = \ker(\text{coker}(J \rightarrow X))$ , 因此是最小的. 此外如图

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{im } f & & \\ & \nearrow p & \downarrow \varphi & \searrow i & \\ X & & J & & Y \xrightarrow{g} C, \\ & \searrow q & & \nearrow j & \\ & & J & & \end{array}$$

右侧是交换的, 因此

$$\begin{aligned} j \circ \varphi \circ p &= i \circ p \\ &= j \circ q, \end{aligned}$$

由于 $j$ 是单态射, 这意味着 $\varphi \circ p = q$ , 即整幅图是交换的.  $\square$

对偶地, 可以的定义态射 $f : X \rightarrow Y$ 的余像(coimage)是 $\text{coker } \ker f$ , 那么如上命题对偶地说明余像是使得复合 $X \rightarrow \text{coim } f \rightarrow Y$ 是 $f : X \rightarrow Y$ 的最大的 $X$ 的商对象.

**推论 A.7.1.** 设 $f : X \rightarrow Y$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射, 则

1.  $f$ 是满态射当且仅当 $\text{im } f = Y$ , 当且仅当 $\text{coker } f = 0$ ;
2.  $f$ 是单态射当且仅当 $\ker f = 0$ , 当且仅当 $\text{coim } f = X$ .

证明. 依据对偶性, 只证明第一部分. 习题A.7说明必要性是正确的.

对于充分性, 若 $\text{coker } f = 0$ , 那么习题A.7说明 $\text{im } f = Y$ . 给定 $g, h : Y \rightarrow Z$ 满足 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$ , 于是存在分解

$$X \xrightarrow{f} Y = X \rightarrow \ker(g - h) \rightarrow Y,$$

且由命题A.7,  $\ker(g - h)$ 包含了 $\text{im } f$ . 这样 $\ker(g - h) = Y$ , 进而 $g - h = 0$ .  $\square$

**推论 A.7.2.** 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X \rightarrow \text{im } f$  是满态射. 对偶地,  $\text{coim } f \rightarrow Y$  是单态射.

证明. 假设  $X \rightarrow \text{im } f$  不是满态射, 那么  $\text{coker}(X \rightarrow \text{im } f) \neq 0$ , 取  $J = \ker \text{coker}(X \rightarrow \text{im } f)$ , 它是严格小于  $\text{im } f$  的子对象 (否则二者相等,  $\text{coker} \ker \text{coker}(X \rightarrow \text{im } f) = \text{coker}(X \rightarrow \text{im } f) = 0$ ), 且命题 A.7 存在分解  $X \rightarrow J \rightarrow \text{im } f$ , 这与  $\text{im } f$  是最小分解矛盾.  $\square$

推论 A.7.1 说明 Abel 范畴中态射单与满的行为与环模范畴是相同的.

**定理 A.8.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射, 则存在唯一的分解

$$X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} Y,$$

使得  $p : X \rightarrow I$  是满态射,  $i : I \rightarrow Y$  是单态射.

此外, 如果  $k : K \rightarrow X$  是  $f : X \rightarrow Y$  的核,  $c : Y \rightarrow C$  是  $f : X \rightarrow Y$  的余核, 则  $k : K \rightarrow X$  也是  $p : X \rightarrow I$  的核,  $c : Y \rightarrow C$  也是  $i : I \rightarrow Y$  的余核, 且  $i : I \rightarrow Y$  是  $c : Y \rightarrow C$  的核,  $p : X \rightarrow I$  是  $k : K \rightarrow X$  的余核.

证明. 首先我们来证明分解的唯一性. 假设我们有两个不同的对象  $I, \bar{I}$  满足上述分解, 于是我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & p \nearrow & \uparrow \varphi & \searrow i & \\ X & & & & Y \xrightarrow{g} Z, \\ & \bar{p} \searrow & \downarrow \bar{i} & \nearrow & \\ & & \bar{I} & & \end{array}$$

其中  $i : I \rightarrow Y$  是  $g : Y \rightarrow Z$  的核. 由核的定义, 我们有  $g \circ i = 0$ , 进而  $g \circ \bar{i} \circ \bar{p} = g \circ f = g \circ i \circ p = 0$ . 但  $\bar{p}$  是满态射说明  $\bar{p}$  存在右消去, 故  $g \circ \bar{i} = 0$ . 再根据核的分解, 存在唯一的  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  使得右边三角形交换, 即  $i \circ \varphi = \bar{i}$ . 故  $i \circ \varphi \circ \bar{p} = \bar{i} \circ \bar{p} = f = i \circ p$ . 但  $i$  是单态射因此存在左消去, 于是  $\varphi \circ \bar{p} = p$ . 这样就证明了  $\varphi$  使整个图交换. 同样地, 我们可以构造  $\psi : I \rightarrow \bar{I}$  使整幅图交换, 根据抽象无意义  $\varphi \circ \psi = \text{id}_I$  且  $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\bar{I}}$ , 故  $I \cong \bar{I}$ , 唯一性得证.

命题 A.7、推论 A.7.1 和 A.7.2 说明了  $I = \text{im } f$  是满足条件的一个分解, 因此分解是存在的. 同时命题的对偶说明  $J = \text{coim } f$  也是一个分解, 因此根据刚刚证明的分解的唯一性,  $\text{im } f \cong \text{coim } f$ . 这意味着剩余的论断是成立的.  $\square$

结合习题 A.4 的结论,

习题 A.11. 设  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射, 求证  $g \circ f = 0$  当且仅当  $\text{im } f$  是  $\ker g$  的子对象, 当且仅当  $\text{coim } g$  是  $\text{coker } f$  的商对象.

证明. 命题 A.7 说明有分解

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z = X \rightarrow \text{im } f \hookrightarrow Y \xrightarrow{g} Z.$$

若  $g \circ f = 0$ , 则存在分解

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \ker g & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & & & & Y \xrightarrow{g} Z, \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \text{im } f & &
 \end{array}$$

根据 $\text{im } f$ 的最小性，存在 $\text{im } f \hookrightarrow \ker g$ 使整幅图交换，即 $\text{im } f$ 是 $\ker g$ 的子对象.反过来，若 $\text{im } f$ 是 $\ker g$ 的子对象，则 $\text{im } f \hookrightarrow Y \xrightarrow{g} Z = 0$ ，进而 $g \circ f = 0$ .

对于另一部分，

□

### A.1.3 例子

例 A.2. 若 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴，则 $\mathcal{A}^\circ$ 也是Abel范畴.

例 A.3. 考虑范畴 $R - \mathbf{Mod}$

例 A.4. 假定 $\mathcal{C}$ 是小范畴， $\mathcal{A}$ 是给定的Abel范畴，考虑范畴 $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ ，我们希望证明此范畴是Abel范畴.

这里需要构造和验证的条目我们依次列出来并进行证明：

1. 根据习题 A.3， $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 中的零对象是常值零函子，即函子

$$\begin{aligned}
 \text{Const}_0 : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{A} \\
 A &\mapsto 0.
 \end{aligned}$$

我们也记该函子为0.

2. 范畴理论说明给定函子 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ，在范畴 $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中， $F \times G$ 和 $F \coprod G$ 都存在，并且都是逐点定义的.给定 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ，由于在 $\mathcal{A}$ 中范畴的有限乘积和余乘积同构，因此 $F \times G \cong F \coprod G$ .
3. 任意给定 $\alpha : F \Rightarrow G$ ，定义

$$\ker(\alpha)(A) := \ker(\alpha_A)$$

和

$$\text{coker}(\alpha)(A) := \text{coker}(\alpha_A),$$

根据 $\ker$ 与 $\text{coker}$ 的函子性， $\ker(A)$ 与 $\text{coker}(A)$ 也都是函子，并且逐点地可以验证它们分别满足相应的泛性质.

4. 最后要证明单态射是核，满态射是余核.首先，范畴 $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 中的单态射和满态射都是逐点的单态射和满态射.由于前一条的核和余核的定义都是逐点的，因此这一条是正确的.

### A.1.4 正合性

**定理 A.9.** 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射，则如下描述等价：

1.  $\text{im}(X \rightarrow Y) = \ker(Y \rightarrow Z)$ ;
2.  $\text{coker}(X \rightarrow Y) = \text{coim}(Y \rightarrow Z)$ ;
3.  $X \rightarrow Y \rightarrow Z = 0$  且  $\ker(Y \rightarrow Z) \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y) = 0$ .

证明. 我们来证明1与3是等价的, 这样对偶地可以证明2与3是等价的.

若1是成立的, 记  $I := \text{im}(X \rightarrow Y) = \ker(Y \rightarrow Z)$ , 于是根据分解  $X \rightarrow Y \rightarrow Z = X \rightarrow I \rightarrow Y \rightarrow Z = X \rightarrow 0 = 0$ . 另一方面,  $\ker(Y \rightarrow Z) = \text{im}(X \rightarrow Y) = \ker(\text{coker}(X \rightarrow Y))$ , 因此直接由定义

$$\ker(Y \rightarrow Z) \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y) = \ker(\text{coker}(X \rightarrow Y)) \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y) = 0.$$

若3是成立的, 记  $I := \text{im}(X \rightarrow Y) = \ker(\text{coker}(X \rightarrow Y))$ ,  $\ker(Y \rightarrow Z) \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y) = 0$  意味着存在唯一的  $\ker(Y \rightarrow Z) \rightarrow I$  与已知的态射相容, 并且它是单态射, 于是  $\ker(Y \rightarrow Z) \leq I$ . 同时,  $X \rightarrow Y \rightarrow Z = 0$  蕴含着分解  $X \rightarrow \ker(Y \rightarrow Z) \rightarrow Y \rightarrow Z = 0$ , 同时命题A.7说明  $X \rightarrow I \rightarrow Y$  是最小的分解, 因此存在单态射  $I \rightarrow \ker(Y \rightarrow Z)$ , 这样  $\ker(Y \rightarrow Z) = I$ .  $\square$

对于满足条件1的态射序列  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ , 称该序列在  $Y$  处正合(exact); 对偶地满足条件2的态射序列  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ , 称该序列在  $Y$  处余正合(coexact). 特别地, 若序列

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

在每处都正合, 则称这是个短正合序列(short exact sequence). 定理实际上说明了Abel范畴的正合性和余正合性是等价的.

正合性和余正合性的等价性是Abel范畴特有的性质之一, 它保证了我们只需要正合性就可以定义合适的等价关系, 这体现在之后对稳定性的证明.

**推论 A.9.1.** 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ,

1. 序列  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$  在  $X$  处是正合的当且仅当  $f$  是单态射,
2. 序列  $Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  在  $Z$  处是正合的当且仅当  $g$  是满态射,
3. 序列  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$  是短正合列当且仅当  $X \xrightarrow{f} Y$  是单射且  $Y \cong \text{coker } f$ , 当且仅当  $Y \xrightarrow{g} Z$  是满射且  $X \cong \ker g$ ,
4. 若序列  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$  正合则  $X = \ker(Y \rightarrow Z)$ , 序列  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$  正合则  $Z = \text{coker}(X \rightarrow Y)$ .

证明. 1. 根据推论A.7.1,  $f$  是单态射当且仅当  $\ker f = 0$ , 而 0 恰是  $0 \rightarrow X$  的像, 因此  $f$  是单态射当且仅当  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$  在  $X$  处是正合.

2. 对偶于第一部分, 同样由推论A.7.1得.

3.  $\square$

**推论 A.9.2.** 序列

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Y \rightarrow 0$$

是短正合列.

**定理 A.10** (Abel范畴的稳定性). 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$ , 则

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{l} & X \\ \downarrow h & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

是范畴  $\mathcal{A}$  中的拉回交换图当且仅当

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U$$

是正合的. 对偶地,

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{l} & X \\ \downarrow h & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

是范畴  $\mathcal{A}$  中的推出交换图当且仅当

$$Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U \rightarrow 0$$

是正合的.

证明. 根据对偶性我们只证明前半部分, 此时需要验证如下的论断:

1.  $Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y$  是单态射. 任取  $p, q : W \Rightarrow Z$  满足  $\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} q$ , 则有交换图

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{lp=lq} & & & \\ \searrow hp=hq & \nearrow & Z & \xrightarrow{l} & X \\ & & \downarrow h & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

$p : W \rightarrow Z$  和  $q : W \rightarrow Z$  都满足虚线箭头所需要的性质, 根据泛性质  $p = q$ , 即证明了单态射.

2.  $\text{im} \begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$ , 为此, 我们验证二者有相同的泛性质.

注意到  $V \rightarrow X \times Y$  复合  $\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$  后为 0 当且仅当  $V \hookrightarrow X \times Y$  诱导的  $i : V \rightarrow X$  和  $j : V \rightarrow Y$  满足交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & U, \end{array}$$

这是因为复合  $V \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U$  恰好是  $if - jg$ , 其等于 0 等价于图交换. 于是  $K = \ker \begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$  满足交换图, 且任意满足交换图的  $i : V \rightarrow X, j : V \rightarrow Y$  都由复合为 0 给出了唯一的  $V \dashrightarrow K$ , 这恰好也是拉回的泛性质.

□

一般情况下, 正合性的判断是困难的, 并且往往是很多问题的核心. 经典环模范畴中的技巧被称为“追图”(diagram chasing). 由于一般Abel范畴中无法讨论对象的元素, 因而追图暂时并不现实. 但下一小节我们将引入合适的工具, 使得一般Abel范畴中的追图技术上的难度基本等同于环模范畴.

**命题 A.11.** 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的序列  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ , 满足  $g \circ f = 0$ , 记  $k : K \rightarrow Y = \ker g, c : Y \rightarrow C = \text{coker } f$ , 于是根据泛性质存在交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & \nearrow a & \downarrow k & \searrow b & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \downarrow c & & & \\ & & C. & & \end{array}$$

此时存在自然的同构

$$\text{coker } a = \ker b.$$

证明. 首先考虑特殊的情形: 假定  $f$  是单态射,  $g$  是满态射. 我们希望证明, 此时  $a : X \rightarrow K$  是  $c \circ k : K \rightarrow C$  的核,  $b : C \rightarrow Z$  是  $c \circ k : K \rightarrow C$  的余核.

记  $h = c \circ k : K \rightarrow C$ . 首先, 根据核和余核的定义,  $h \circ a = 0, b \circ h = 0$ . 任取  $w : W \rightarrow K$  满足  $h \circ w = 0$ , 即有交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \swarrow w & \downarrow h & \searrow c & \\ W & \xrightarrow{w} & K & \xrightarrow{h} & C, \\ & \searrow k & & \nearrow c & \\ & & Y & & \end{array}$$

推论A.2.2说明 $f : X \rightarrow Y$ 是 $c : Y \rightarrow C$ 的核，因此存在唯一的分解

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \swarrow w & \downarrow & \searrow h & \\ W & \xrightarrow{\quad} & K & \xrightarrow{\quad} & C, \\ & \uparrow a & \downarrow k & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & \end{array}$$

这意味着 $a : X \rightarrow K$ 是 $c \circ k : K \rightarrow C$ 的核，对偶地 $b : C \rightarrow Z$ 是 $c \circ k : K \rightarrow C$ 的余核。此时，定理A.8意味着 $\text{coker } a = \text{im } c \circ k = \ker b$ 。

对于一般的情况，序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 有分解

$$X \longrightarrow \text{im } f \longrightarrow Y \longrightarrow \text{im } g \longrightarrow Z,$$

且根据定理A.8， $\text{im } f \rightarrow Y$ 是单同态， $Y \rightarrow \text{im } g$ 是满同态，依据核和余核的泛性质，存在交换图

$$\begin{array}{ccccccc} & & & K & & & \\ & \nearrow a & & \downarrow k & & & \\ X & \longrightarrow & \text{im } f & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \text{im } g \longrightarrow Z \\ & \uparrow \tilde{a} & & & \downarrow \tilde{b} & & \uparrow b \\ & & C & & & & \end{array}$$

定理A.8也说明了 $\text{coker } a = \text{coker } \tilde{a}$ 和 $\ker b = \ker \tilde{b}$ ，而之前的讨论说明了 $\text{coker } \tilde{a} = \ker \tilde{b}$ ，这就证明了命题。□

**定义.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的子对象 $i : X \hookrightarrow Y$ ，称 $\text{coker } i$ 为 $Y$ 关于 $X$ 的商，记为 $Y/X$ 。

根据练习A.8，商在同构的意义下是良定义的。

**推论 A.11.1.** 按命题A.11中的记号，

$$\text{coker } a = \ker b = \frac{\ker g}{\text{im } f}.$$

证明. 习题A.11说明 $\text{im } f$ 是 $\ker g$ 的子对象。□

**例 A.5.** 我们记**FilAb**是所有可滤Abel群组成的范畴，其中的态射 $\varphi : F^\bullet A \rightarrow F^\bullet B$ 满足 $\varphi(F^i A) \subseteq F^i B$ 对任意*i*都成立。

这个范畴中可以定义 $\ker$ 和 $\text{coker}$ ，其中 $\ker$ 的滤子结构来自于 $F^\bullet A$ ， $\text{coker}$ 的滤子结构来自于 $F^\bullet B / F^\bullet B \cap \varphi(A)$ 。

考虑假设同一个Abel群 $A$ 上有两个滤子结构 $F^\bullet A$ 和 $G^\bullet A$ ，满足 $F^i A \subseteq G^i A$ 对任意*i*都成立。此时，恒同映射 $\text{id} : A \rightarrow A$ 诱导了滤子之间的态射 $F^\bullet A \rightarrow G^\bullet A$ 。这是一个单射也是一个满射；但若存在 $i_0$ 使得 $F^{i_0} A \neq G^{i_0} A$ ，则这不是一个同构。

### A.1.5 Abel范畴中对象的元素和态射

事实上，我们并不需要完全范畴化地处理Abel范畴，公理所保证的性质使我们可以用类似处理元素的方式处理Abel范畴中的对象。我们将详细地构建这样的技术，于是Abel范畴事实上与**Ab**并没有特别多的区别。

给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 $Y$ ， $Y$ 中的对象 $y$ 是如下等价类 $(X, h)$ ，其中 $X \in \text{ob } \mathcal{A}$ ， $h : X \rightarrow Y$ ， $(X_1, h_1)$ 等价于 $(X_2, h_2)$ 当且仅当

- 存在 $Z \in \text{ob } \mathcal{A}$ 和满态射 $u_1 : Z \rightarrow X_1, u_2 : Z \rightarrow X_2$ 满足 $h_1 u_1 = h_2 u_2$ ，即有交换图

$$\begin{array}{ccc} & X_1 & \\ u_1 \nearrow & & \searrow h_1 \\ Z & & Y \\ u_2 \searrow & & \nearrow h_2 \\ & X_2. & \end{array}$$

**引理 A.2.** 设如下Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的拉回交换图

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{l} & X \\ h \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & U, \end{array}$$

那么 $h$ 诱导了同构 $\ker l \cong \ker g$ ，更准确地讲，若 $k : K \rightarrow Z$ 是 $l : Z \rightarrow X$ 的核，则 $hk : K \rightarrow Z \rightarrow Y$ 是 $g : Y \rightarrow U$ 的核。（对偶地推出图诱导了余核的同构。）由此如果 $f$ 是满态射那么 $h$ 是满态射。

证明。任取 $w : W \rightarrow Y$ 使得 $W \rightarrow Y \rightarrow U = 0$ ，因此

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{\quad 0 \quad} & & & \\ \swarrow w & & \searrow h & & \\ Z & \xrightarrow{l} & X & & \\ \downarrow & & \downarrow f & & \\ Y & \xrightarrow{g} & U & & \end{array}$$

构成了交换图。由于 $Z$ 是拉回，因此存在 $W \dashrightarrow Z$ 与整幅图交换，这意味着 $W \dashrightarrow Z \rightarrow X = 0$ ，由于 $K$ 是 $Z \rightarrow X$ 的核，存在唯一的 $W \rightarrow K$ 使得 $W \rightarrow K \rightarrow Z = W \dashrightarrow Z$ 。这样验证了 $hk : K \rightarrow Z \rightarrow Y$ 是 $g : Y \rightarrow U$ 的核的泛性质，因此 $h$ 诱导了同构。

现在假设 $f$ 是满态射，那么由于 $Z$ 是拉回，

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U$$

是正合的，同时 $f$ 是满态射意味着对任意 $u, v : U \rightrightarrows V$ ，若 $u \begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$ 则 $uf = vf$ ，因此 $u = v$ ，

即 $\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$ 是满态射，所以

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U \rightarrow 0$$

是短正合序列.这样，交换图

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{l} & X \\ h \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & U, \end{array}$$

同时是推出，因此上段讨论的对偶说明 $\text{coker } h = \text{coker } f = 0$ ，即 $h$ 是满态射.  $\square$

习题 A.12. 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : X \rightarrow Y$ 和 $X$ 中的元素 $u : U \rightarrow V$ ，求证若 $f(u) = 0$ 则 $f \circ u = 0$ .

证明.  $f(u) = 0$ 意味着 $[f \circ u] = [0]$ ，即存在满态射 $w : W \rightarrow U$ 使得 $f \circ u \circ w = 0$ . 满态射说明 $f \circ u = 0$ .  $\square$

由引理A.2如上所述的关系是等价关系.一般并没有通常的方法使得集合之间的映射 $\{Y_1\text{中的元素}\} \rightarrow \{Y_2\text{中的元素}\}$ 对应到 $\mathcal{A}$ 中的态射 $Y_1 \rightarrow Y_2$ ，但反过来当给定了态射之后可以构造自然的集合间的映射，并且元素的存在可以帮助我们简单地验证正合性：

**定理 A.12.** 设 $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ 是Abel范畴中的态射， $y$ 是 $Y_1$ 的元素，有代表元 $(X, h)$ ，求证 $f$ 给出了集合间的映射

$$\begin{aligned} f : \{Y_1\text{中的元素}\} &\rightarrow \{Y_2\text{中的元素}\} \\ [(X, h)] &\mapsto [(X, f \circ h)], \end{aligned}$$

与复合交换，并且

1.  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ 是单态射当且仅当 $f(y) = 0$ 意味着 $y = 0$ ，
2.  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ 是单态射当且仅当 $f(y_1) = f(y_2)$ 意味着 $y_1 = y_2$ ，
3.  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ 是0态射当且仅当对任意 $Y_1$ 的元素 $y$ ， $f(y) = 0$ ，
4.  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ 是满态射当且仅当对任意 $Y_2$ 的元素 $z$ ，存在 $Y_1$ 的元素 $y$ 使得 $f(y) = z$ ，
5. 序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 在 $Y$ 处正合当且仅当 $g \circ f = 0$ 并且对任意的 $v \in Y$ ，若 $g(v) = 0$ 则存在 $u \in X$ 使得 $f(u) = v$ ，
- 6.

证明. 我们首先证明如上给出了集合间的良定义的映射，即若 $[(X_1, h_1)] = [(X_2, h_2)]$ ，则 $[(X_1, f \circ h_1)] = [(X_2, f \circ h_2)]$ . 由定义 $[(X_1, h_1)] = [(X_2, h_2)]$ 意味着存在 $Z \in \text{ob } \mathcal{A}$ 和满态射 $u_1 : Z \rightarrow X_1, u_2 : Z \rightarrow X_2$ 满足 $h_1 u_1 = h_2 u_2$ ，那么 $f h_1 u_1 = f h_2 u_2$ ，即 $[(X_1, f \circ h_1)] = [(X_2, f \circ h_2)]$ .

取代表元与复合交换意味着复合映射

$$\begin{aligned} \{Y_1\text{中的元素}\} &\xrightarrow{f} \{Y_2\text{中的元素}\} \xrightarrow{g} \{Y_3\text{中的元素}\} \\ [(X, h)] &\mapsto [(X, f \circ h)] \mapsto [(X, g \circ (f \circ h))] \end{aligned}$$

和复合映射

$$\begin{aligned} \{Y_1\text{中的元素}\} &\rightarrow \{Y_3\text{中的元素}\} \\ [(X, h)] &\mapsto [(X, g \circ f \circ h)] \end{aligned}$$

是相同的映射，而这根据良定义性质是显然的。

- 若  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$  是单态射，任取  $Y_1$  中的元素  $y : X \rightarrow Y_1$ ，满足  $f(y) = 0$ ，则

$$X \xrightarrow{y} Y_1 \xrightarrow{f} Y_2 = X \xrightarrow{0} Y_2 = X \xrightarrow{0} Y_1 \xrightarrow{f} Y_2,$$

由  $f$  是单同态可知， $y = 0$ . 反过来， $f : Y_1 \rightarrow Y_2$  的核  $\ker f \hookrightarrow Y_1$  是  $Y_1$  的元素且  $f(\ker f) = 0$ ，因此  $\ker f = 0$ ，推论A.7.1说明  $f$  是单态射。

2.

- 若  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$  是 0 态射，显然对任意  $Y_1$  的元素  $y$ ， $f(y) = 0$ . 反过来，取  $y = \text{id}_{Y_1} : Y_1 \rightarrow Y_1$ ，则  $[f(\text{id}_{Y_1})] = [f \circ \text{id}_{Y_1}] = [f] = [0]$ ，于是习题A.12说明  $f = 0$ . (注意到这一部分开始严格用到等价类定义中的满态射性质。)
- 若  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$  是满态射，任取  $Y_2$  中的元素  $z : Z \rightarrow Y_2$ ，于是  $\tilde{z} : Y_1 \times_{Y_2} Z \rightarrow Y_1$  是  $Y_1$  中的元素，我们需要证明  $f(\tilde{z}) = z$ . 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} Y_1 \times_{Y_2} Z & \xlongequal{\quad} & Y_1 \times_{Y_2} Z & \xrightarrow{\tilde{z}} & Y_1 \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow f \\ & & Z & \longrightarrow & Y_2, \end{array}$$

引理A.2说明  $Y_1 \times_{Y_2} Z \rightarrow Z$  也是满态射，而恒同态射必然是满态射，因而  $[f(\tilde{z})] = [z]$ . 反过来，只需要证明若  $g : Y_2 \rightarrow W$  满足  $Y_1 \xrightarrow{f} Y_2 \xrightarrow{g} W = 0$ ，则  $g = 0$ . 为此，对任意  $z : \ker g \rightarrow Y_2$ ，按假设存在  $y : Y \rightarrow Y_1$  使得  $[f(y)] = [z]$ ，即存在交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{v} & Z & & \\ u \downarrow & & \downarrow z & & \\ Y & \xrightarrow{y} & Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \xrightarrow{g} W, \end{array}$$

满足  $u, v$  都是满态射. 按第3部分，只要证明  $g(z) = 0$  即可；但是

$$g \circ z \circ v = g \circ f \circ y \circ u = 0 \circ y \circ u = 0 = 0 \circ v,$$

且  $v$  是满态射，因此  $g \circ z = 0$ .

5. 定理A.9说明, 对于必要性只要证明 $\ker(Y \rightarrow Z) \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y) = 0$ . 注意到 $k : \ker(Y \rightarrow Z) \rightarrow Y$ 给出了 $Y$ 的元素, 于是存在 $X$ 中的元素 $u : U \rightarrow X$ 满足 $f(u) = k$ . 按余核的定义 $[c \circ k] = [c \circ f \circ u] = 0$ , 习题A.12说明 $c \circ k = 0$ .

反过来, 对于充分性, 任取 $Y$ 中的元素 $v : V \rightarrow Y$ 使得 $g(v) = 0$ , 按核的定义存在唯一的分解 $V \dashrightarrow \ker g \rightarrow Y = v$ , 于是有如图交换图 (定理A.9)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & V & & \\ & & & & \downarrow v & & \\ & & & & \swarrow k & & \\ X & \xrightarrow{p} & \text{im } f & \xleftarrow{\quad} & \ker g & \xleftarrow{i} & Y \xrightarrow{g} Z. \end{array}$$

取 $U := X \times_{\text{im } f} V$ , 那么由引理A.2, 结构态射 $q : U \rightarrow V$ 是满态射, 记结构态射 $X \times_{\text{im } f} V \rightarrow X$ 为 $u$ , 则 $f \circ u \circ \text{id}_U = v \circ q$ , 于是 $[f \circ u] = [v]$ , 即 $f(u) = v$ .

6.

□

**引理 A.3** (5引理).

**定理 A.13** (蛇形引理). 给定交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\alpha_2} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2, \end{array}$$

那么存在长正合序列

$$\ker f \xrightarrow{a_1} \ker g \xrightarrow{a_2} \ker h \xrightarrow{\delta} \text{coker } f \xrightarrow{b_1} \text{coker } g \xrightarrow{b_2} \text{coker } h,$$

其中 $a_1, a_2$ 和 $b_1, b_2$ 分别由 $\alpha_1, \alpha_2$ 和 $\beta_1, \beta_2$ 诱导, 连接态射 $\delta : \ker h \rightarrow \text{coker } f$ 是唯一存在的使得对于下图

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \xrightarrow{s_1} & K = \ker h \times_{Z_1} Y_1 & \xrightarrow{s_2} & \ker h & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow k & & \downarrow i & & \\ X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 \\ \downarrow p & & \downarrow c & & & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{coker } f & \xrightarrow{t_1} & C = \text{coker } f \coprod^{X_2} Y_2 & \xrightarrow{t_2} & Z_2 \end{array}$$

满足 $t_1 \circ \delta \circ s_2 = c \circ g \circ k$ 的态射.

证明. 1.  $\ker f \xrightarrow{a_1} \ker g \xrightarrow{a_2} \ker h$  在  $\ker g$  处正合.

2.  $\operatorname{coker} f \xrightarrow{b_1} \operatorname{coker} g \xrightarrow{b_2} \operatorname{coker} h$  在  $\operatorname{coker} g$  处正合.

3.  $\ker h$  是  $s_1 : X_1 \rightarrow \ker h \times_{Z_1} Y_1$  的余核; 对偶地,  $\operatorname{coker} f$  是  $t_2 : C \rightarrow Z_2$  的余核.

由于  $i : \ker h \rightarrow Z_1$  是单态射且单态射的拉回是单态射, 因此  $k : K \rightarrow Y_1$  是单态射; 由于  $\beta_1 : Y_1 \rightarrow Z_1$  是满态射, 引理 A.2 说明  $s_2$  是满态射, 且明显  $s_2 \circ s_1 = 0$ , 这样由推论 A.9.1 第4部分和定理 A.12 第5部分, 只要证明对任意  $K$  中的元素  $w : W \rightarrow K$ , 若  $s_2(w) = 0$  则存在  $v : V \rightarrow X_1$  使得  $s_1(v) = w$ .

考虑  $Y_1$  中的元素  $k \circ w : W \rightarrow Y_1$ , 结合  $Y_1$  处的正合性, 定理 A.12 第5部分说明存在  $X_1$  中的元素  $v : V \rightarrow X_1$  使得  $\alpha_1(v) = k(w)$ . 图的交换性可得

$$[k \circ w] = [\alpha_1 \circ v] = [k \circ s_1 \circ v],$$

上一段中我们证明了  $k$  是单态射, 这意味着  $[w] = [s_1 \circ v]$ , 即  $s_1(v) = w$ .

4.  $\delta : \ker h \rightarrow \operatorname{coker} f$  是存在的. 注意到  $c \circ g \circ k \circ s_1 = c \circ g \circ \alpha_1 = t_1 \circ p \circ f = 0$  且  $t_2 \circ c \circ g \circ k = h \circ i \circ s_2 = 0$ ,

根据练习 A.4, 存在唯一的  $\delta : \ker h \rightarrow \operatorname{coker} f$  使得  $t_1 \circ \delta \circ s_2 = c \circ g \circ k$ .

5.

□

特别地, 当  $\mathcal{A}$  是范畴  $R\text{-Mod}$  时, 连接态射  $\delta$  是容易写出来的: 习题 A.10 给出了拉回的构造 (对偶地推出的构造也可以写出来), 于是

$$K = \ker h \times_{Z_1} Y_1 = \{(z, y) \in \ker h \times Y_1 \mid \alpha_2(y) = i(z) = z\} \cong \alpha_2^{-1}(\ker h),$$

并且在此同构下  $s_2 = \alpha_2|_{\alpha_2^{-1}(\ker h)}$ ; 对偶地

$$C = \operatorname{coker} f \coprod^{X_2} Y_2 = \frac{\operatorname{coker} f \times Y_2}{\{(p(x), \beta_1(x)) \mid x \in X_2\}},$$

于是

$$K \xrightarrow{k} Y_1 \xrightarrow{g} Y_2 \xrightarrow{c} C$$

是映射

$$(z, y) \mapsto y \mapsto g(y) \mapsto [(0, g(y))].$$

定义

$$\delta : \ker h \rightarrow \operatorname{coker} f$$

$$z \mapsto p(\beta_1^{-1}(g(y))),$$

其中

(i)  $y \in Y_1$  是满足  $\alpha_2(y) = z$  的元素, 它的存在性由  $\alpha_2$  的满射保证, 并且因此  $(z, y) \in K$ ;

(ii)  $x = \beta_1^{-1}(g(y))$  是  $X_2$  中满足  $\beta_1(x) = g(y)$  的元素,

我们只需要验证所定义的 $\delta$ 是（唯一）满足 $t_1 \circ \delta \circ s_2 = c \circ g \circ k$ 的环模同态即可. 注意到 $t_1 \circ \delta \circ s_2$ 给出映射

$$(z, y) \mapsto z \mapsto p(\beta_1^{-1}(g(y))) \mapsto [p(\beta_1^{-1}(g(y))), 0] = [(0, g(y))].$$

这恰是所需要的.

习题 A.13. 假定对Abel范畴 $\mathcal{A}$ 蛇形引理成立, 求证5引理成立.

$$\text{证明.} \quad \begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 \xrightarrow{\alpha_4} A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 \xrightarrow{\beta_4} B_5 \end{array}$$

考虑

$$\begin{array}{ccccc} A_2/\ker \alpha_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & \ker \alpha_4 \longrightarrow 0 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ 0 & \longrightarrow & B_2/\ker \beta_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 \xrightarrow{\beta_3} \ker \beta_4 \end{array}$$

□

### A.1.6 Abel范畴中的特殊对象

**定义.** 设 $P$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象, 若满足对任意的满态射 $f : X \rightarrow Y$ 和任意态射 $g : P \rightarrow Y$ , 都可以找到 $h : P \rightarrow X$ 使得 $g = f \circ h$ ,

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow h & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \longrightarrow 0, \end{array}$$

则称 $P$ 是投射对象(projective object).

对偶地, 若对象 $I$ 满足对任意的

**引理 A.4.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 及其中的一族投射对象 $\{P_i\}_{i \in I}$ , 其中 $I$ 是指标集. 若 $\bigoplus_{i \in I} P_i$ 存在, 则其也是投射的.

证明.

□

**定义.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ , 若对任意对象 $X$ 都存在 $\mathcal{A}$ 中的投射对象 $P$ 和满态射

$$P \twoheadrightarrow X \rightarrow 0,$$

则称范畴 $\mathcal{A}$ 中有足够多的投射对象(sufficiently many projective objects, enough projectives).

习题 A.14. 设  $s : P \rightarrow P$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射,  $(P, s)$  是  $\mathcal{A}/P$  的投射对象, 证明  $P$  是  $\mathcal{A}$  中的投射对象.

证明. 任取  $\mathcal{A}$  中的满态射  $g : X \rightarrow Y$ ,

□

## A.2 Abel 范畴间函子

**定义.** 若  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  加性范畴, 协变函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  满足对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $X, Y$ , 由  $F$  诱导的映射  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$  是群同态, 则称  $F$  是加性函子 (additive functor).

**定理 A.14.** 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是 Abel 范畴,  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  是加性函子当且仅当  $F$  保直和.

证明.

□

**定义.** (left exact)

**命题 A.15.** Abel 范畴间的左正合函子是加性的.

**定义.** 若范畴间协变函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  满足对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $A, B$ , 由  $F$  诱导的映射  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$  是单射, 则称  $F$  是嵌入 (embedding).

**定理 A.16.** 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是 Abel 范畴,  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  是加性函子, 则下列陈述等价

1.  $F$  是嵌入.
2.  $F$  将非交换图映为非交换图.
3.  $F$  将非正合序列映为非正合序列.

### A.2.1 Serre subcategory

**定义.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的满子范畴, 满足

1.  $\mathcal{B}$ 的对象关于取子对象和商对象封闭, 即对任意 $\mathcal{B}$ 中的对象 $Y$ , 若 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的短正合列, 那么 $X, Z$ 是 $\mathcal{B}$ 中的对象,
2.  $\mathcal{B}$ 中的对象关于扩张封闭, 即对任意 $\mathcal{B}$ 中的对象 $X, Z$ , 若 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的短正合列, 那么 $Y$ 是 $\mathcal{B}$ 中的对象,

则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的Serre子范畴(Serre subcategory).

**例 A.6.**  $\mathbf{FinAb}$ 是 $\mathbf{Ab}$ 中的Serre子范畴

**习题 A.15.** 求证: Abel范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{B}$ 是Serre子范畴当且仅当 $\mathcal{B}$ 中的对象关于扩张封闭,

证明. 我们只要证明关于扩张封闭意味着关于取子对象和商对象封闭即可.  $\square$

**定理 A.17.** 任意给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 和它的Serre子范畴 $\mathcal{B}$ , 存在Abel范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 和正合函子 $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{A}$ 中的对象 $X$ 在 $\mathcal{B}$ 中当且仅当 $P(A) = 0$ , 且对任意满足 $\mathcal{A}$ 中的对象 $X$ 在 $\mathcal{B}$ 中当且仅当 $F(A) = 0$ 的正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ , 存在唯一的正合函子 $H : \mathcal{A}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ & \searrow P & \nearrow H \\ & \mathcal{A}/\mathcal{B} & \end{array}$$

交换.

证明. 我们要构造这样一个范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 并证明该泛性质.

记 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 是范畴, 满足

**命题 A.18.** 给定Abel范畴之间的伴随

$$F : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{B} : G,$$

1. 若 $F$ 是左伴随的, 那么 $G$ 将内射对象映为内射对象,
2. 若 $G$ 是左伴随的, 那么 $F$ 将投射对象映为投射对象.

### A.3 嵌入定理

习题 A.16. 设  $k$  是域,  $k-\mathbf{grMod}$  是所有  $\mathbb{Z}$  分次  $k$  模组成的范畴, 满足

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n, \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n\right) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(V_n, W_n),$$

$\mathcal{A}$  是所有微分态射为 0 的  $k$  微分模组成的范畴, 求证

$$\begin{aligned} F : k-\mathbf{grMod} &\rightarrow \mathcal{A} \\ \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n &\mapsto \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n[n], d = 0 \right) \end{aligned}$$

是范畴的等价.

定义. 给定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的对象  $X$ , 若对任意的正向系  $I$  和分解

$$X = \sum_{i \in I} X_i = \mathrm{colim}_{i \in I} X_i,$$

其中  $X_i$  是  $X$  的子对象, 都存在  $i_0 \in I$  使得  $X_{i_0} = X$ , 则称  $X$  是有限生成的.

## 附录 B $A_\infty$

这节中我们始终假定  $k$  是域.

定义.  $k$  上的  $A_\infty$  包含

1.  $\mathbb{Z}$  分次的  $k$  向量空间

$$A := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p,$$

2. 齐次  $k$  线性映射

$$m_n : A^{\otimes n} \rightarrow A,$$

满足

(i)  $m_n$  的阶数为  $2 - n$ , 并且  $m_1$  满足  $m_1 \circ m_1 = 0$  (即  $A^\bullet, m_1$  是上链复形),

(ii) 对任意  $n \geq 1$ , 有关系式

$$\sum_{n=r+s+t} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(\text{id}_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \text{id}_A^{\otimes t}) = 0.$$



# 索引

- $A^G$ , 81  
 $G$ 模, 81  
 $\delta$ 函子, 18  
 $\text{Tot}(M)$ , 28  
 $\text{coker } f$ , 107  
 $\text{im } f$ , 114  
 $\ker f$ , 107  
 $\tau^{\leq n}(X^\bullet, d^\bullet)$ , 8  
 $s|_V$ , 67  
Abel范畴, 110  
bar消解, 83  
Hochschild同调, 87  
Künneth定理, 35  
Serre子范畴, 129  
上链, 7  
态射, 7  
余核, 107  
像, 114  
全复形, 28  
加性函子, 128  
加性范畴, 109  
双积, 109  
加细, 79  
商对象, 105  
 $C = B/\sim$ , 106  
复形  
正阶数, 7  
子商, 112  
子对象, 105  
 $A \subseteq B$ , 106  
层, 69  
微分分次Lie代数, 97  
投射对象, 127  
拟同构, 9  
核, 107  
正合, 118  
余正合, 118  
正合对, 41  
导出对, 41  
消解, 8  
滤子, 43  
有界滤子, 48  
诱导滤子, 47  
谱序列, 46  
链接态射, 19  
零对象, 107  
预层, 67  
态射, 68  
截面, 67  
茎, 68  
限制映射, 67



## 参考文献

- [1] Daniel Ferrand. On the non additivity of the trace in derived categories, 2005.